SOBRAPO

PODes
Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento

Rio de Janeiro, v.2, n.3, p. 232-249, setembro a dezembro de 2010

UMA COMPREENSÍVEL MODELAGEM DE LOTES ECONÔMICOS DE COMPRA PARA UM OU MAIS PRODUTOS COM DESCONTOS INCREMENTAIS E/OU SOBRE TODAS AS UNIDADES.

Valdecy Pereira
valdecypereira@yahoo.com.br
Universidade Federal Fluminense

Helder Gomes Costa
hgc@vm.uff.br
Universidade Federal Fluminense

Luis Ernesto Torres Guardia
tepletg@vm.uff.br
Universidade Federal Fluminense

Resumo

Este trabalho apresenta uma modelagem não-linear e inteira de lotes econômicos de compras, com um ou mais produtos que apresentem descontos incrementais e/ou descontos sobre todos os itens adquiridos. O método a ser apresentado difere de outros métodos de resolução numéricos, pois utiliza uma abordagem binária para a obtenção da solução ótima. Exemplos numéricos são apresentados ao longo do trabalho com intuito de facilitar a compreensão sobre toda a modelagem desenvolvida.

Palavras Chave: descontos, ótima, lote econômico de compra, multi-produto

Abstract

The following work presents an integer non-linear model to find economic order quantities for one or more products with incremental discounts and/or all-units discounts. The method presented differs from other classical solution, because it uses a binary strategy, to obtain the optimal solution. Numerical examples are presented throughout the work in order to improve the understanding of the model.

Key Words: discounts, optimal, economic order quantity, multi-product

Versão inicial submetida em 15/1/2010. Versão final recebida em 11/10/2010.

Introdução

O lote econômico de compras é uma importante ferramenta para empresas que necessitem minimizar custos e reinvestir o capital, que antes era desperdiçado em estoques mal planejados, para outras áreas da empresa que precisem de mais orçamento ou aproveitar oportunidades surgidas no mercado. O lote econômico busca o equilíbrio entre o número de pedidos de compras anuais e a estocagem dos produtos comprados, esses custos somados ao dispêndio do custo de compra formam o custo total do lote econômico.

O primeiro modelo de lote econômico, o modelo básico, apresentado por F.W. Harris em 1913, trabalha o *trade-off* entre pedidos e estocagem dos produtos (ERLENKOTTER, 1990, p.937), e apesar de ser um modelo robusto, ele não pode ser aplicado a qualquer situação gerencial real. Por exemplo, o modelo não leva em consideração os descontos que podem ser feitos por parte dos fornecedores, pela aquisição de um volume maior de determinado produto. Com essa preocupação, o trabalho desenvolvido no presente artigo, descreve passo a passo uma proposta para modelagem de lotes econômicos de compra de um ou mais produtos com descontos.

Os descontos apresentados no trabalho, são de duas naturezas, a primeira é a respeito dos descontos incrementais e a segundo a respeito dos descontos sobre todas as unidades. Quando existe descontos incrementais, um determinado preço k é feito para uma quantidade de itens entre l e n, então se n itens forem comprados o seu custo seria igual a: $k.n$. Se $n+m$ itens forem comprados, o desconto x sobre o preço de compra só vale para as quantidades acima de n, sendo então o seu custo de compra igual a: $k.n + (k-x).m$. Para os descontos sobre todas as unidades, o preço de compra com desconto é retroativo a quantidade total adquirida, sendo então o custo de compra igual a $k.n$ para n itens e $(k-x).(n+m)$ para $n+m$ itens. Poucos estudos sobre lotes econômicos de compra com descontos incrementais são achados na literatura, e os modelos de resolução atuais mostram-se numericamente trabalhosos (BHATTACHARYA, 2004).

Na seção 1 é exposta a modelagem desenvolvida por Harris e os diferentes comportamentos das funções de custo total mediante ao uso dos descontos incrementais e sobre todas as unidades. Na seção 2 , a modelagem para um ou mais produtos com descontos incrementais será explicada passo a passo, juntamente com exemplos numéricos. Na seção 3 será feito o mesmo para a modelagem de um ou mais produtos com descontos sobre todas as unidades. Na seção 4 será explicada a modelagem multi-produto para itens que tenham os dois tipos de descontos. Na seção 5 exemplos numérico serão resolvidos para todos os tipos de modelos propostos e finalmente o presente artigo se encerra com uma análise sobre a modelagem realizada.

1. Modelo básico de lote econômico de compras e as diferentes funções de custo total

Nesta seção apresentam-se os principais modelos de lode econômico encontrados na literatura.

1.1. Modelo básico

O modelo de lote econômico desenvolvido por Harris possui como função de custo total anual, a seguinte expressão:

$$CT = \frac{A.D}{Q} + \frac{i.c.Q}{2} + c.D \qquad (1)$$

e o lote econômico de compra propriamente dito como:

$$Q = \sqrt{\frac{2.A.D}{i.c}} \tag{2}$$

onde:

A = Custo fixo de pedido;
D = Demanda anual;
i = Custo unitário de armazenagem, que é um percentual sobre o preço unitário de compra;
c = Preço unitário de compra;
Q = Lote econômico de compras;

$\frac{A.D}{Q}$ = Custo total de pedido anual;

$\frac{i.c.Q}{2}$ = Custo total de armazenagem anual;

$c.D$ = Custo total de compra anual.

A curva de custo total é convexa e apresenta um único ponto mínimo que pode ser encontrado tomando a primeira derivada da equação 1 (BENTON & PARK, 1996, p. 218). No modelo simples a informação do custo total de compra, não é necessário para obtenção do lote econômico (equação 2). Sendo o mesmo encontrado no ponto mínimo da curva de custo total anual (Figura 1), que pode ser formada apenas pelas curvas do custo de armazenagem e do custo de pedido anuais.

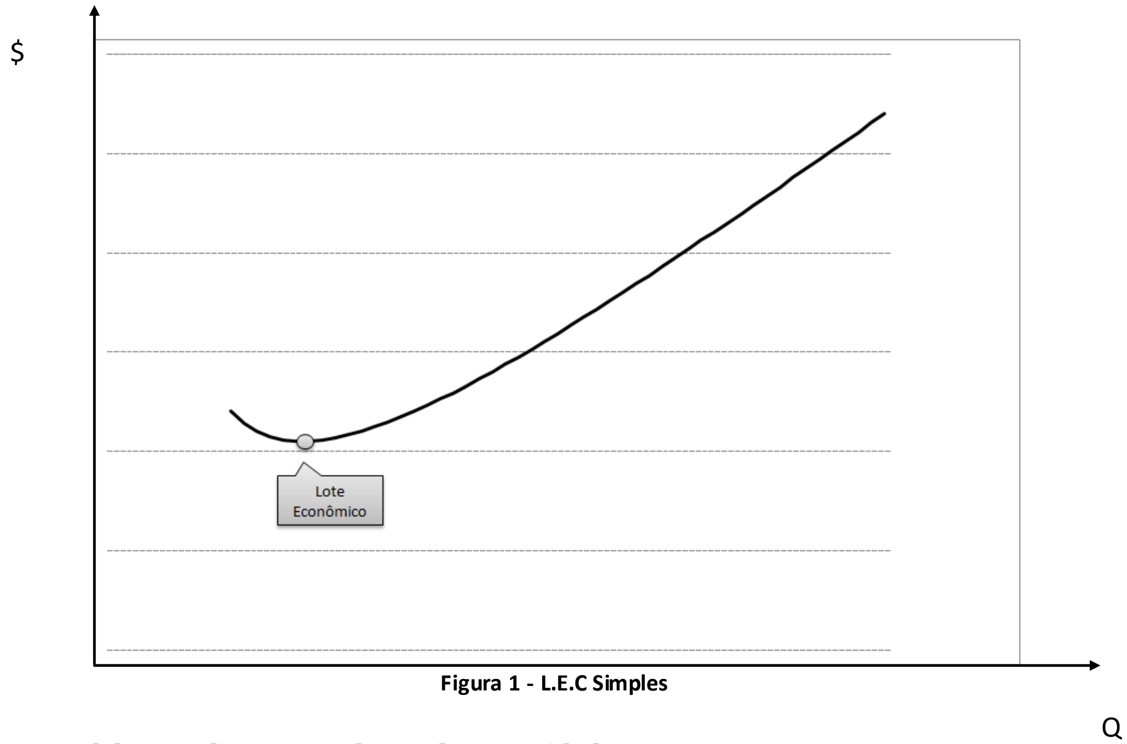

Figura 1 - L.E.C Simples

1.2. Modelo com descontos sobre todas as unidades

Quando o fornecedor promove descontos sobre a quantidade total de itens, a curva de custo total anual (Figura 2) sofre mudanças e o cálculo do lote não poderá ser mais feito da mesma maneira, pois o custo de compra deverá ser considerado na composição do custo total. A nova curva apresenta diferentes pontos de mínimo locais, mas somente um ponto de mínimo global.

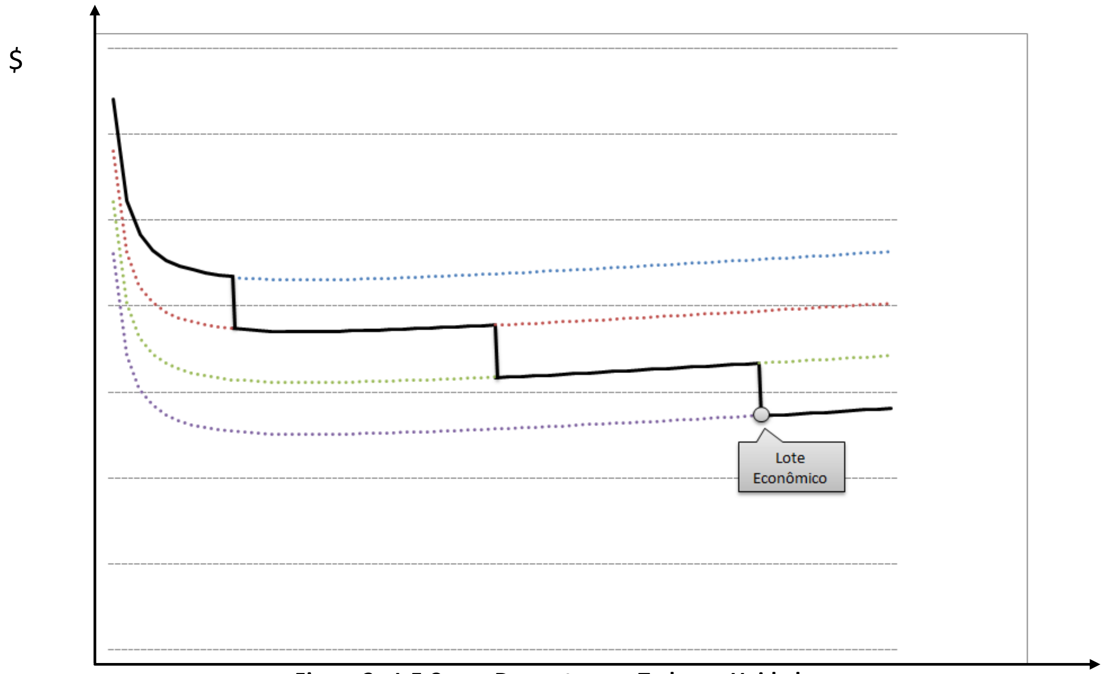

Figura 2 - L.E.C com Descontos em Todas as Unidades

Como pode ser percebido neste exemplo específico, à medida que a quantic Q aumenta o custo total diminui. Quando a quantidade Q cresce até entrar em uma das faixas de desconto, a curva de custo total se desprende da curva original e é descontinuada para essa nova faixa. Então todas as descontinuidades da curva surgem em função de cada faixa de desconto existente para o produto. Vale lembrar que, dependendo do problema, o custo total poderá aumentar ou diminuir assim que entrar em qualquer faixa de desconto.

1.3. Modelo com descontos incrementais

As mesmas considerações sobre o comportamento da curva de custo total de produtos com descontos sobre todas as unidades, também vale para descontos incrementais. A diferença é que existe uma sobreposição de curvas que dependem unicamente das quantidades adquiridas.

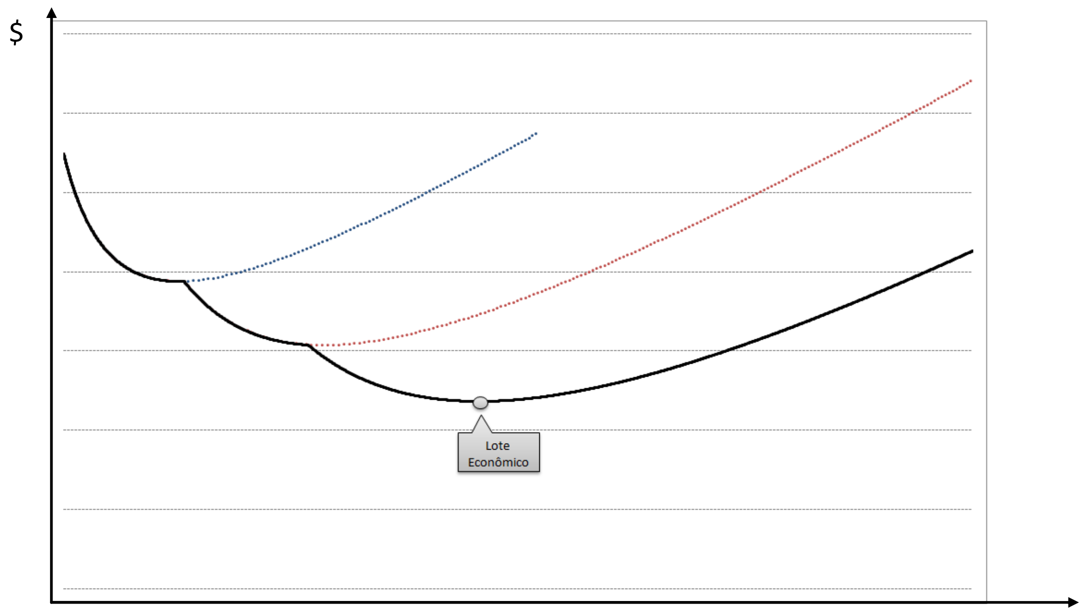

Figura 3 - L.E.C com Descontos Incrementais

Q

As descontinuidades da curva de custo total da Figura 3, também se dão em função das faixas de descontos. Os descontos oferecidos pelo fornecedor fazem com que m itens de um total de $n + m$ itens, sejam comprados mais baratos. Por esse motivo a curva não se desprende da mesma maneira do que curva da Figura 2. a curva de custo total com descontos incrementais também forma diversos pontos de mínimos locais e apenas um único ponto de mínimo global.

Nos exemplos das curvas de custo total das Figuras 2 e 3, propositalmente todos os pontos de mínimo global estão após todos os pontos mínimo locais. No entanto, o ponto de mínimo global não necessariamente precisa ser o último ponto de mínimo da curva, ele pode se encontrar em qualquer posição, ou seja, pode ser o primeiro ponto de mínimo ou estar entre quaisquer outros pontos de mínimo locais.

Os métodos tradicionais de resolução desse problema fazem uma busca numérica entre todos os pontos de mínimo da curva, comparando seus valores e atribuindo o lote econômico que consiga gerar o menor valor do conjunto (TAHA, 2007). A modelagem a seguir apresenta uma nova maneira de se fazer esse tipo de busca, utilizando também a comparação de valores, porém com números binários.

2. Proposta de modelagem para um ou vários produtos com desconto incremental

Nesta seção apresentam-se os principais modelos de lode econômico para um ou vários produtos com desconto incremental.

2.1 – Modelo 1: Desconto Incremental para um único produto.

A função objetivo do modelo proposto é baseada na minimização da função do custo total anual com desconto incremental (equação 3). Porém a função do modelo apresenta duas peculiaridades, a primeira delas é uso de variáveis binárias, y_j ,que multiplicam os custos de armazenagem e os custos de compra anuais. A segunda peculiaridade é que as quantidades de itens comprados, representados por q_j, são segmentados de acordo com as faixas de desconto oferecidas pelo fornecedor. Considerando que $k = 0,1,2, \dots j$, e $j = 1,2,3, \dots n$, obtemos:

$$\text{CT} = \frac{A.D}{Q} + y_0.c_0\left[i.\left(\frac{q_0}{2}\right) + D\right] + \sum_{j=1}^{n} y_j.\sum_{k=0}^{j} c_k.q_k.\left[\frac{i}{2} + \frac{D}{Q}\right] \qquad (3)$$

onde,

c_k = Preço de compra dentro de uma faixa de desconto k.
q_k = Quantidade a ser comprada dentro de uma faixa de desconto k.

Para ilustrar essa função, suponha o seguinte exemplo: um certo produto possui um preço de compra de $\$1,00$ para quantidades entre um e 999 itens; um preço de $\$0,95$ para quantidades entre 1000 e 2499 itens e um preço de compra de $\$0,90$ para quantidades acima de 2500 unidades:

Tabela 1 - Limites de Unidades

$l_0 = 1$	$\leq$	Q	$<$	$u_0 = 1000$	$K = 0$
$l_1 = 1000$	$\leq$	Q	$<$	$u_1 = 2500$	$K = 1$
$l_2 = 2500$	$\leq$	Q	$<$	$u_2 = \infty$	$K = 2$

onde,

l_k = Limite inferior da faixa k;
u_k = Limite superior da faixa k.

E considerando que a demanda anual (D) seja de 8000 unidades, o custo unitário de armazenagem (i) é de 20% e que o custo fixo de pedido (A) é de $\$150{,}00$; teremos:

$$CT(1) = \frac{150 \times 8000}{Q}$$
$$+\boldsymbol{y_0} \times \left[1{,}00 \times 0{,}2 \times \left(\frac{q_0}{2}\right) + 1{,}00 \times 8000\right]$$
$$+\boldsymbol{y_1} \times \left[(1{,}00 \times q_0 + 0{,}95 \times q_1) \times \left(\frac{0{,}2}{2} + \frac{8000}{Q}\right)\right]$$
$$+\boldsymbol{y_2} \times \left[(1{,}00 \times q_0 + 0{,}95 \times q_1 + 0{,}90 \times q_2) \times \left(\frac{0{,}2}{2} + \frac{8000}{Q}\right)\right] \quad (4)$$

Cada variável binária y está ligada a uma estratégia de compra, sendo esta responsável pela aceitação $(y = 1)$ ou rejeição $(y = 0)$ das estratégias propostas. Porém o modelo só será capaz de fazer essa escolha se as restrições estiverem bem definidas. Sem as devidas restrições o modelo assumirá que todas as variáveis binárias serão iguais a zero , obtendo assim como menor custo possível, somente o custo de pedido anual $\left(\frac{A.D}{Q}\right)$.

As restrições a seguir, farão com que o modelo a escolha a estratégia de menor custo e portanto achar o lote econômico ótimo. A primeira restrição, representa a quantidade a ser comprada entre a primeira e a penúltima faixa k:

$$q_k = [Q - (l_k - 1)].y_k + (u_k - l_k).(1 - y_k);\ k = 0{,}1{,}2 \ldots n - 1 \quad (5)$$

Caso o lote econômico estiver dentro de uma determinada faixa k, a variável binária y será igual a um; o primeiro membro do lado esquerdo da equação 5: $[Q - (l_k - 1)].y_j$; indicará quantidade a ser comprada Q, sendo $Q = q_k$ e $l_k \leq Q < u_k$; o segundo membro da equação 5: $(u_k - l_k).(1 - y_k)$, será igual a zero.

Mas se o lote econômico Q estiver numa faixa $k + h, h = 1{,}2 \ldots n - 1$, a variável binária y, assumirá o valor de zero e o primeiro membro do lado esquerdo da equação 5, será zerado. O segundo membro da equação, representará então a quantidade máxima de itens que podem ser compradas com o preço de desconto da faixa k.

Por exemplo, para os mesmos valores utilizados para a Figura 4, se o lote econômico Q for de 1500 unidades, q_0 será igual a 999 unidades (com o preço de $1,00) e q_1 = 501 (com o preço de $0,95). O valor de q_2 deverá ser ignorado pois o lote econômico foi achado na faixa anterior.

A segunda restrição, representa a última faixa $K = n$:

$$q_n = [Q - (l_n - 1)].y_n \tag{6}$$

Essa restrição possui a mesma formulação da equação 5, porém o segundo membro do lado esquerdo está ausente, pois partir da quantidade l_n, não existe limite para a compra de mais unidades com desconto.

A terceira restrição, diz respeito as variáveis binárias. Ela força o modelo a escolher apenas uma estratégia da função objetivo:

$$\sum_{k=0}^{n} y_k = 1; k = 0,1,2 \dots n \tag{7}$$

A quarta restrição, garante que a estratégia escolhida seja aceita quando pelo menos um item da faixa de desconto é comprado:

$$q_k \geq y_k;\ k = 0,1,2 \dots n \tag{8}$$

As restrições de não-negatividade também se aplicam ao modelo, que também pode ser programado para achar soluções determinísticas, bastando acrescentar a restrição de que Q seja um número inteiro. Essa restrição aumentará a dificuldade para se achar a solução ótima do modelo, porém testes empíricos demonstram que a solução da variável Q contínua é uma aproximação muito boa do valor da solução ótima inteira, e basta na maioria dos casos arredondar os valores para o número inteiro mais próximo para se achar o valor determinístico. Pode-se notar também que caso os valores c_j sejam todos iguais, o modelo irá calcular o lote econômico de compras simples (equação 2).

Montando o modelo completo teremos:

$$\min \frac{A.D}{Q} + y_0.c_0\left[i.\left(\frac{q_0}{2}\right) + D\right] + \sum_{j=1}^{n} y_j.\sum_{k=0}^{j} c_k.q_k.\left[\frac{i}{2} + \frac{D}{Q}\right]$$

S.A

$$q_k = [Q - (l_k - 1)].y_k + (u_k - l_k).(1 - y_k); k\ = 0,1,2 \dots n - 1$$

$$q_n = [Q - (l_n - 1)].y_n$$

$$\sum_{k=0}^{n} y_k = 1; k = 0,1,2 \dots n$$

$$q_k \geq y_k; k = 0,1,2 \dots n$$

$$y_k = (0; 1)$$

$$A; D; Q; q; c; i; u; l \geq 0$$

Opcional: $Q\ \in$ Conjunto de Nº Inteiros

2.2 – Modelo 2: Desconto Incremental para multi-produtos.

A modelagem multi-produto a seguir tem como base o trabalho de Chopra e Meindl (2001), que busca sincronizar o reabastecimento de vários produtos em um mesmo carregamento (Figura 4b), ou seja, evitar a chegada desorganizada de produtos que pode gerar custos quanto ao gerenciamento das cargas e do armazenamento (Figura 4a). Chopra e Meindl desenvolveram uma metodologia de resolução para esse problema, que acha uma solução muito próxima da ótima. Essa resolução modifica as quantidades dos lotes para que ocorra uma sincronização dentro de um mesmo período, mas esse método faz com que os valores dos lotes fiquem muito distantes do valor do lote econômico.

A modelagem proposta neste artigo faz o mesmo, porém os novos lotes para a sincronização possuem valores mais próximos dos lotes econômicos, pois a sincronização é feita de acordo com o ciclo de cada produto e não com o período. A penalidade por receber produtos não-sincronizados, são considerados neste trabalho como intangíveis difíceis de serem medidos e por esse motivo não serão incluídos no custo total.

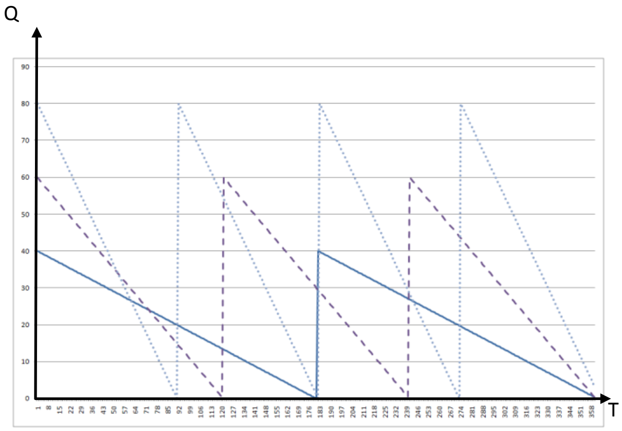

Figura 4a - Exemplo de Produtos Não-Sincronizados

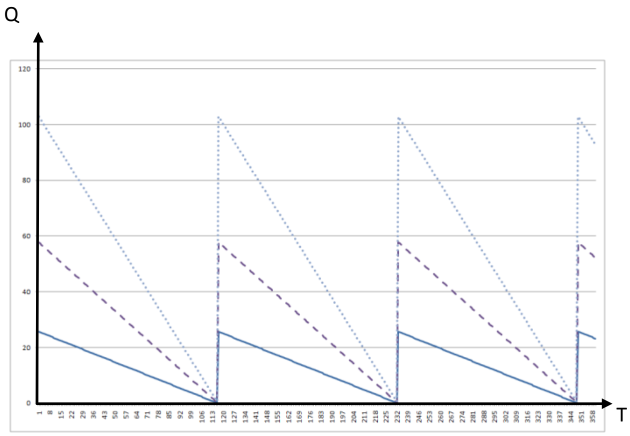

Figura 4b - Exemplo de Produtos Sincronizados

Na Figura 4a, os produtos chegam em datas diferentes pois cada produto possui seu próprio lote econômico ideal e taxa de consumo. Na Figura 4b as datas de chegada são as mesmas, ou seja, estão sincronizadas e para haver a sincronização são feitas alterações no tamanho do lote econômico de cada produto respeitando a taxa de consumo individual.

Para a sincronização de produtos é preciso que se ache primeiro qual é o produto mais pedido e para isso é preciso adicionar na função objetivo, além da equação de custo total multi-produto, a seguinte expressão:

$$\frac{\sum_{z=1}^{m}\left(\frac{Q_z}{D_z}\right).\, n_z}{B}; z = 1,2,\ldots m \tag{9}$$

onde,

n = Variável binária responsável pela escolha do menor tempo de ciclo;
m = Quantidade de produtos com descontos incrementais;
B = Um número suficientemente grande.

A equação 9 indicará, juntamente com um novo grupo de restrições que serão detalhadas a seguir, qual é o produto com o maior número de pedidos $\left(\frac{D}{Q}\right)$ através do menor tempo de ciclo $\left(\frac{Q}{D}\right)$. Com um B suficientemente grande essa indicação ocorrerá sem que se mude o resultado final do custo total da função objetivo. Considerando que $z = 1,2,3 \ldots m,$ sendo z um índice que indica o conjunto dos produtos que sofrem descontos incrementais, obtemos:

(10)

$$\text{CT} = \sum_{z=1}^{m} \left\{ \frac{A_z \, . \, D_z}{Q_z} + y_{z0} \, . \, c_{z0} \left[i_z . \left(\frac{q_{z0}}{2} \right) + D_z \right] + \sum_{j=1}^{n} y_{zj} \, . \sum_{k=0}^{j} c_{zk} . \, q_{zk} \, . \left[\frac{i_z}{2} + \frac{D_z}{Q_z} \right] \right\} + \frac{\sum_{z=1}^{m} \left(\frac{Q_z}{D_z} \right) . \, n_z}{B}$$

As seguintes restrições devem estar contidas na modelagem:

$$\sum_{z=1}^{m} n_z = 1; \; z = 1,2, \ldots m \tag{11}$$

$$N = \sum_{z=1}^{m} \left(\frac{D_z}{Q_z} \right) . \, n_z \, ; z = 1,2, \ldots m \tag{12}$$

$$\frac{N}{\frac{D_z}{Q_z}} = INT_z; \; z = 1,2, \ldots m \tag{13}$$

onde:

N = Valor do maior número de pedidos;
INT_z = Variável que deve assumir somente valores inteiros.

A equação 11 indica que apenas o produto com menor tempo de ciclo e portanto maior número de pedidos é escolhido, a equação 12 indica qual é o valor do maior número de pedidos N e finalmente a equação 13 garante que os ciclos de todos os demais itens sejam submúltiplos de N, fazendo com que ocorram coincidências nas datas de entrada dos itens.

A modelagem completa fica sendo então:

$$\min \sum_{z=1}^{m} \left\{ \frac{A_z . \, D_z}{Q_z} + y_{z0} \, . \, c_{z0} \left[i_z . \left(\frac{q_{z0}}{2} \right) + D_z \right] + \sum_{j=1}^{n} y_{zj} \, . \sum_{k=0}^{j} c_{zk} . \, q_{zk} . \left[\frac{i_z}{2} + \frac{D_z}{Q_z} \right] \right\} + \frac{\sum_{z=1}^{m} \left(\frac{Q_z}{D_z} \right) . \, n_z}{B}$$

S.A

$$q_{zk} = [Q_z - (l_{zk} - 1)]. \, y_{zk} + (u_{zk} - l_{zk}).(1 - y_{zk}); k = 0,1,2 \ldots n - 1 \; e \; z = 1,2, \ldots m$$

$$q_{zn} = [Q_z - (l_{zn} - 1)]. \, y_{zn}; \; z = 1,2, \ldots m$$

$$\sum_{k=0}^{n} y_{zk} = 1; k = 0,1,2 \ldots n \;\; e \;\; z = 1,2, \ldots m$$

$$q_{zk} \geq y_{zk}; k = 0,1,2 \ldots n \;\; e \; z = 1,2, \ldots m$$

$$y_{zk} = (0; 1); k = 0,1,2 \ldots n \;\; e \; z = 1,2, \ldots m$$

$$\sum_{z=1}^{m} n_z = 1;\ z = 1,2, \dots m$$

$$N = \sum_{z=1}^{m} \left(\frac{D_z}{Q_z}\right).n_z\,; z = 1,2, \dots m$$

$$\frac{N}{\frac{D_z}{Q_z}} = INT_z;\ z = 1,2, \dots m$$

$$A; D; Q; q; c; i; u; l \geq 0$$

$$INT_z \in \text{Conjunto de N° Inteiros}; z = 1,2, \dots m$$

Opcional: $$Q_z \in \text{Conjunto de N° Inteiros}; z = 1,2, \dots m$$

3. Proposta de modelagem para um ou vários produtos com desconto sobre todas as unidades

Nesta seção apresentam-se os principais modelos de lode econômico para um ou vários produtos com desconto sobre todas as unidades.

3.1 - Modelo 3: Desconto sobre todas as unidades para um único produto.

Para a aplicação do modelo proposto para o desconto normal uma pequena modificação precisa ser feita na função de custo total (equação 3) , mantendo-se todo o restante igual. A alteração diz respeito ao custo das faixas de desconto que agora considerarão retroativamente todos os itens comprados:

$$\text{CT} = \frac{A.D}{Q} + y_0.c_0\left[i.\left(\frac{q_0}{2}\right) + D\right] + \sum_{j=1}^{n} y_j.\boldsymbol{c_j} \sum_{k=0}^{j}.\, q_k.\left[\frac{i}{2} + \frac{D}{Q}\right] \tag{14}$$

Tomando como exemplo os limites de unidades das faixas de desconto da Figura 4 e os dados referentes do primeiro exemplo, teremos:

$$\begin{aligned} CT(1) = {} & \frac{150 \times 8000}{Q} \\ & + \boldsymbol{y_0} \times 1{,}00\left[0{,}2 \times \left(\frac{q_0}{2}\right) + 1{,}00 \times 8000\right] \\ & + \boldsymbol{y_1} \times 0{,}95\left[(q_0 + q_1) \times \left(\frac{0{,}2}{2} + \frac{8000}{Q}\right)\right] \\ & + \boldsymbol{y_2} \\ & \times 0{,}90\left[(q_0 + q_1 + q_2) \times \left(\frac{0{,}2}{2} + \frac{8000}{Q}\right)\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Montando o modelo completo teremos:

$$\min \frac{A.D}{Q} + y_0.c_0\left[i.\left(\frac{q_0}{2}\right) + D\right] + \sum_{j=1}^{n} y_j.c_j \sum_{k=0}^{j} q_k.\left[\frac{i}{2} + \frac{D}{Q}\right]$$

S.A

$$q_k = [Q - (l_k - 1)].\, y_k + (u_k - l_k).(1 - y_k); k = 0,1,2 \dots n-1$$

$$q_n = [Q - (l_n - 1)].\, y_n$$

$$\sum_{k=0}^{n} y_k = 1; k = 0,1,2 \dots n$$

$$q_k \geq y_k; k = 0,1,2 \dots n$$

$$y_k = (0; 1)$$

$$A; D; Q; q; c; i; u; l \geq 0$$

Opcional: $Q \in$ Conjunto de Nº Inteiros

3.2 - Modelo 4: Desconto sobre todas as unidades para multi-produtos

Dadas as devidas modificações na função objetivo, o modelo multi-produto tem as mesmas características do modelo multi-produto com descontos incrementais, e considerando que $w = 1,2,3 \dots p$, sendo w o índice que indica o conjunto dos produtos que sofrem descontos sobre todas as unidades e p a quantidade desses produtos, obtemos:

$$\min \sum_{w=1}^{p} \left\{ \frac{A_w . D_w}{Q_w} + y_{w0} . c_{w0} \left[i_w . \left(\frac{q_{w0}}{2}\right) + D_w \right] + \sum_{j=1}^{n} y_{wj} . c_{wk} \sum_{k=0}^{j} q_{wk} . \left[\frac{i_w}{2} + \frac{D_w}{Q_w}\right] \right\} + \frac{\sum_{w=1}^{p} \left(\frac{Q_w}{D_w}\right) . n_w}{B} \quad (16)$$

S.A

$$q_{wk} = [Q_w - (l_{wk} - 1)].\, y_{wk} + (u_{wk} - l_{wk}).(1 - y_{wk}); k = 0,1,2 \dots n-1 \; e \; w = 1,2,\dots p$$

$$q_{wn} = [Q_w - (l_{wn} - 1)].\, y_{wn};\; w = 1,2,\dots p$$

$$\sum_{k=0}^{n} y_{wk} = 1; k = 0,1,2 \dots n \;\; e \;\; w = 1,2,\dots p$$

$$q_{wk} \geq y_{wk}; k = 0,1,2 \dots n \;\; e\, w = 1,2,\dots p$$

$$y_{wk} = (0; 1); k = 0,1,2 \dots n \;\; e\, w = 1,2,\dots p$$

$$\sum_{w=1}^{p} n_w = 1;\; w = 1,2,\dots p$$

$$N = \sum_{w=1}^{p} \left(\frac{D_w}{Q_w}\right) . n_w ; w = 1,2,\dots p$$

$$\frac{N}{\frac{D_w}{Q_w}} = INT_w;\; w = 1,2,\dots m$$

$$A; D; Q; q; c; i; u; l \geq 0$$

$$INT_w \in \text{Conjunto de Nº Inteiros}; w = 1,2,\dots p$$

Opcional: $Q_w \in$ Conjunto de Nº Inteiros; $w = 1,2,\dots p$

4 Modelagem multi-produto com descontos incrementais e descontos sobre todas as unidades

A modelagem multi-produto híbrida de descontos, diz respeito a descontos para produtos que possam ter descontos incrementais ou sobre todas as unidades. Para obter a mesma basta realizar a modelagem multi-produto e modificar a fórmula de custo total produto a produto, ou seja, combinar as equações 9 e 12 de acordo com as características de descontos de cada um dos produtos.

5 Exemplificação das modelagens

Nessa seção serão apresentados exemplos resolvidos para todas as modelagens propostas, uma versão demo do LINGO 11.0 64 bits foi utilizado em um computador com a plataforma Windows 7 $x64$, um processador Quad Core de 2,40 *GHz* e 8 *GB* de memória *DDR* 2.

Para os exemplos a seguir considere os seguintes produtos:

Tabela 2 - Produtos *A* e *B*

Produto A		
A_a	$ 150,00	
D_a	8.000 unidades	
i_a	20%	
Faixa de Descontos	**Preços**	
$1 \le Q < 1.000$	c_{a0}	$1,00
$1.000 \le Q < 2.500$	c_{a1}	$0,95
$2.500 \le Q < \infty$	c_{a2}	$0,90

Produto B		
A_b	$ 80,00	
D_b	30.000	
i_b	9%	
Faixa de Descontos	**Preços**	
$1 \le Q < 15.000$	c_{b0}	$2,40
$15.000 \le Q < 35.000$	c_{b1}	$2,20
$35.000 \le Q < \infty$	c_{b2}	$2,10

a) Desconto Incremental - Produto Único: **Produto *A***

Tabela 3 - Produto *A* - Desconto Incremental

Resultado - Q Contínuo		Resultado - Q Inteiro	
Q_a	5.374,012	Q_a	5.374,000
y_{a0}	0	y_{a0}	0
y_{a1}	0	y_{a1}	0
y_{a2}	1	y_{a2}	1
Iterações	165	*Iterações*	3191
Custo Total	$ 8.184,812	*Custo Total*	$ 8.184,812

b) Desconto Incremental - Produto Único: **Produto *B***

Tabela 4 - Produto B - Desconto Incremental

Resultado - Q Contínuo		Resultado - Q Inteiro	
Q_b	45.703,320	Q_b	45.703,000
y_{b0}	0	y_{b0}	0
y_{b1}	0	y_{b1}	0
y_{b2}	1	y_{b2}	1
Iterações	153	*Iterações*	2234
Custo Total	$ 71.930,410	*Custo Total*	$ 71.930,410

Como pode ser visto na Figura 5, não existe sincronização dos pedidos para os dois produtos, ocorrendo, a cada pedido para o produto *B*, um número fracionário (não inteiro) de pedidos para *A*. E como sempre ocorre um pedido único para os dois produtos na origem, ao todo existirão dois pedidos no período um. Sendo o custo total de $ **80.115,22**.

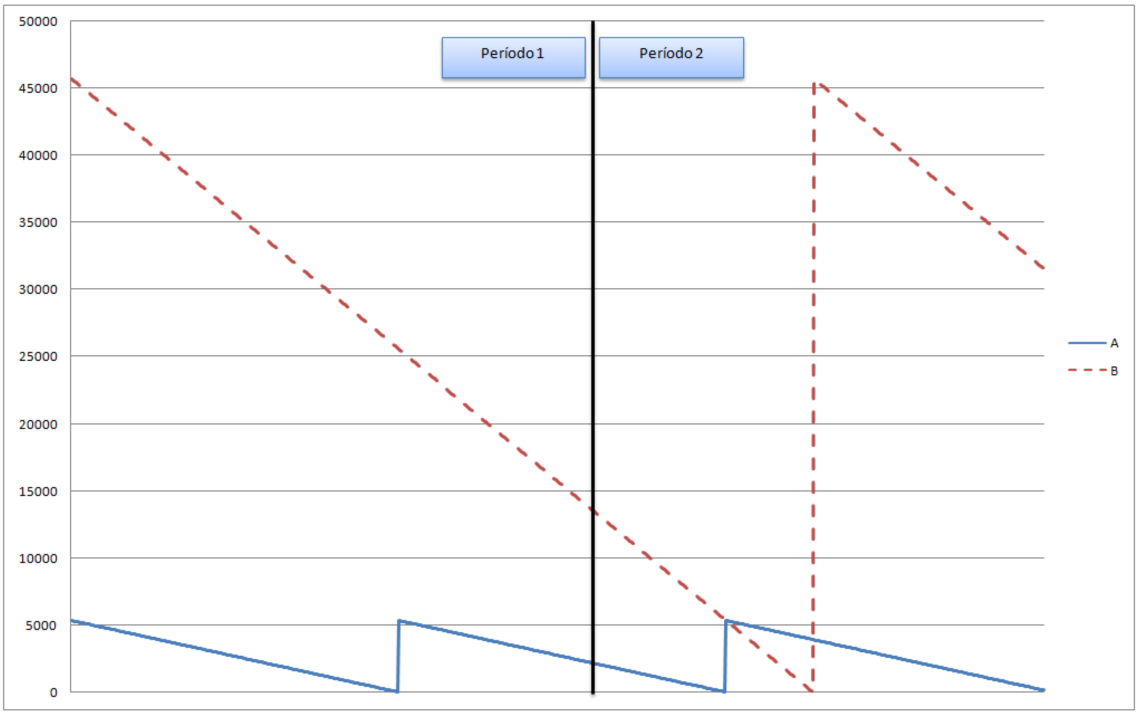

Figura 5 - Produtos *A* e *B* Não-Sincronizados - Descontos Incrementais

c) Desconto Sobre Todas as Unidades - Produto Único: ***Produto A***

Tabela 5 - Produto *A* - Desconto Sobre Todas as Unidades

Resultado - Q Contínuo		Resultado - Q Inteiro	
Q_a	3.651,484	Q_a	3,651
y_{a0}	0	y_{a0}	0
y_{a1}	0	y_{a1}	0
y_{a2}	1	y_{a2}	1
Iterações	113	*Iterações*	986
Custo Total	$ 7.857,267	*Custo Total*	$ 7.857,267

d) Desconto Sobre Todas as Unidades - Produto Único: ***Produto B***

Tabela 6 - Produto *B* - Desconto Sobre Todas as Unidades

Resultado - Q Contínuo		Resultado - Q Inteiro	
Q_b	35.000,000	Q_b	35.000,000
y_{b0}	0	y_{b0}	0
y_{b1}	0	y_{b1}	0
y_{b2}	1	y_{b2}	1
Iterações	140	*Iterações*	717
Custo Total	$ 66.376,070	*Custo Total*	$ 66.376,070

Na Figura 6, não existe sincronização dos pedidos para os dois produtos, ocorrendo, a cada pedido para o produto *B*, um número fracionário (não inteiro) de pedidos para *A*. E como sempre ocorre um pedido único para os dois produtos na origem teremos um total de três pedidos no período um. Sendo o custo total de $ **74.233,34**.

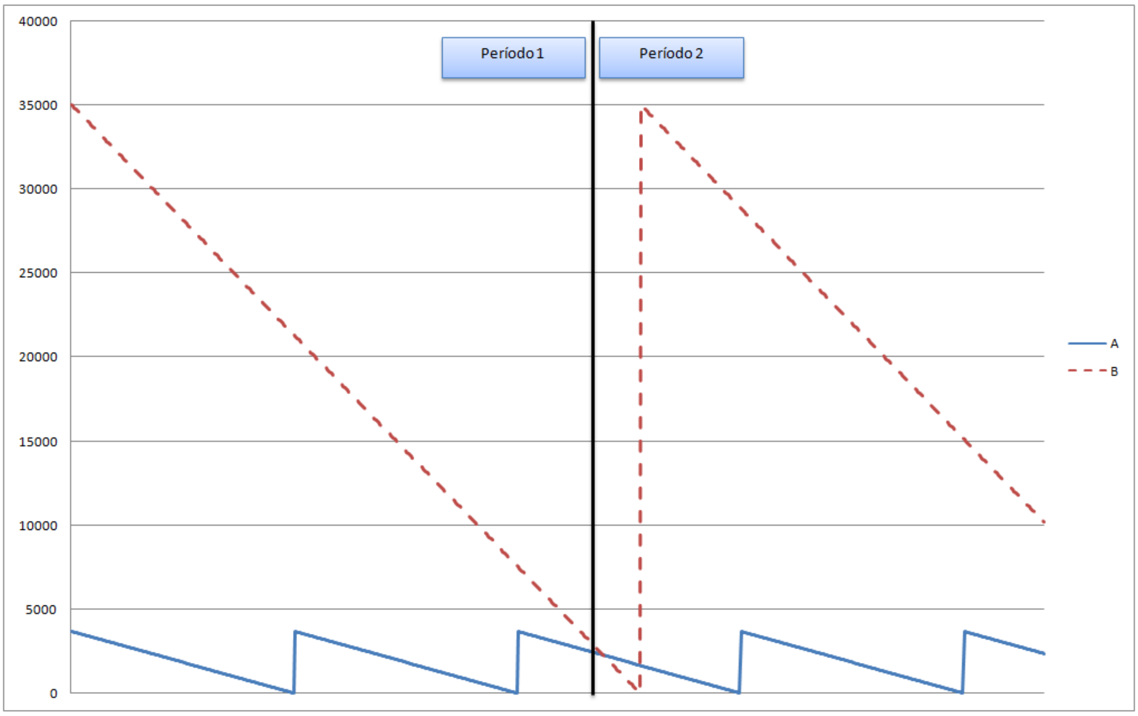

Figura 6 - Produtos *A* e *B* Não-Sincronizados - Descontos Sobre Todas as Unidades

e) Desconto Incremental - Múltiplos-Produtos: **Produto *A*** e **Produto *B***

Tabela 7 - Produtos *A* e *B* - Descontos Incrementais

Resultado - Q Contínuo		Resultado - Q Inteiro	
Q_a	4.029,799	Q_a	4.030
y_{a0}	0	y_{a0}	0
y_{a1}	0	y_{a1}	0
y_{a2}	1	y_{a2}	1
Q_b	30.223,500	Q_b	30.225
y_{b0}	0	y_{b0}	0
y_{b1}	1	y_{b1}	1
y_{b2}	0	y_{b2}	0
Iterações	2706	*Iterações*	7.830
Custo Total	$ 80.044,610	*Custo Total*	$ 80.044,610

Na Figura 7 nota-se, que a cada n pedidos para o Produto A ocorrem exatamente m pedidos para o Produto B (m e n sempre inteiros). Neste o caso, $n = 2$ e $m = 1$. Ao todo três pedidos são feitos no período um. Sendo o custo total de $ $\mathbf{80.044,61}$.

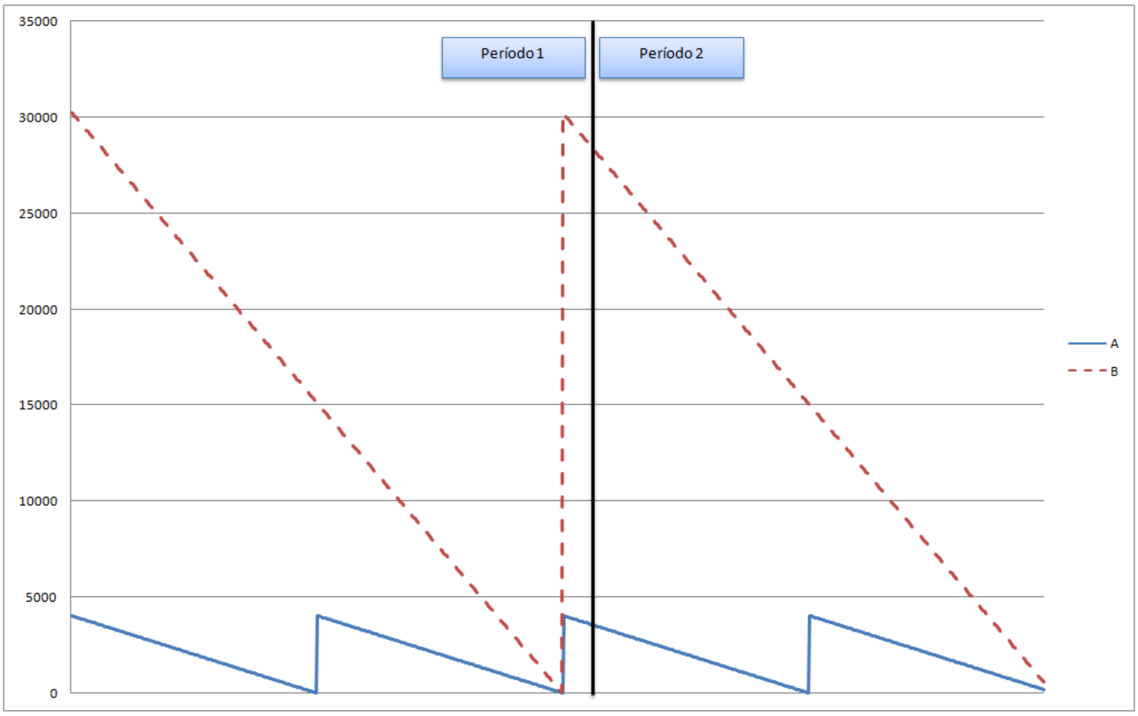

Figura 7 - Produtos A e B Sincronizados - Descontos Incrementais

f) Desconto Sobre Todas as Unidades - Múltiplos-Produtos: **Produto *A*** e **Produto *B***

Tabela 8 - Produtos *A* e *B* - Desconto Sobre Todas as Unidades

Resultado - Q Contínuo		Resultado - Q Inteiro	
Q_a	4.000,001	Q_a	4.000
y_{a0}	0	y_{a0}	0
y_{a1}	0	y_{a1}	0
y_{a2}	1	y_{a2}	1
Q_b	15.000,000	Q_b	15.000
y_{b0}	0	y_{b0}	0
y_{b1}	1	y_{b1}	1
y_{b2}	0	y_{b2}	0
Iterações	1056	*Iterações*	1.066
Custo Total	\$ 75.505,000	*Custo Total*	\$ 75.505,000

Na Figura 8 nota-se, que a cada n pedidos para o Produto A ocorrem exatamente m pedidos para o Produto B (m e n sempre inteiros). Neste o caso, $n = 1$ e $m = 1$. Ao todo três pedidos são feitos no período um. Sendo o custo total de \$ $\mathbf{75.505,00}$.

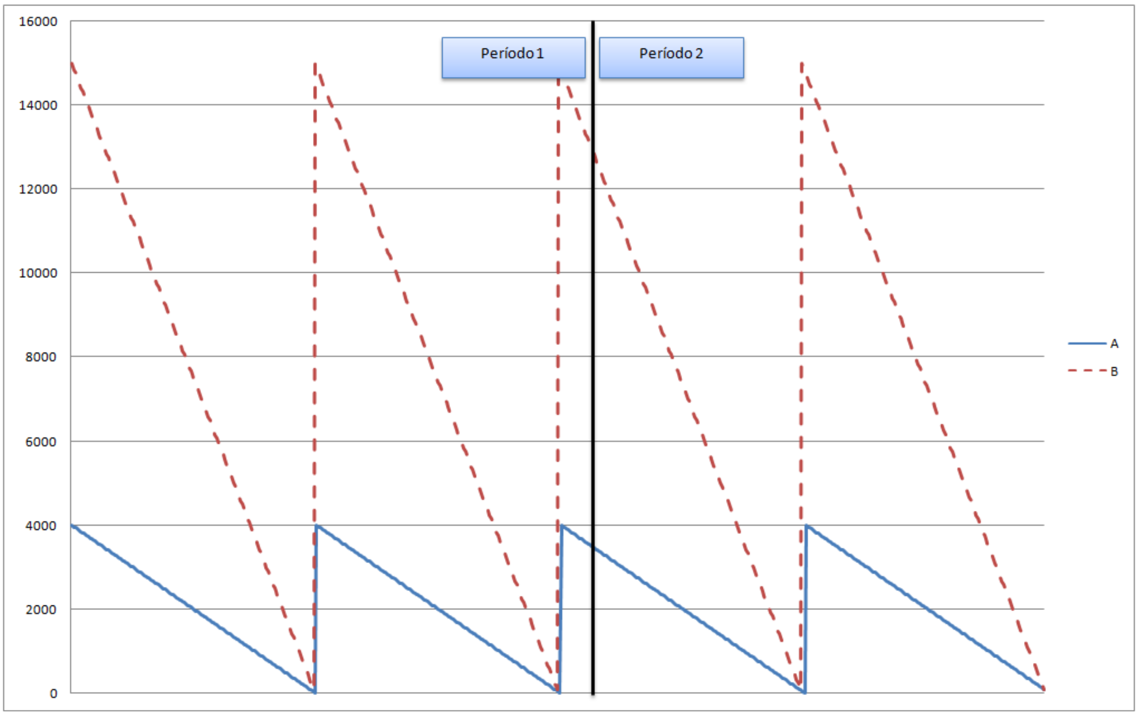

Figura 8 - Produtos *A* e *B* Sincronizados - Descontos Sobre Todas as Unidades

g) Desconto Híbrido - Incremental: **Produto *A*** e Sobre Todas as Unidades: **Produto *B***

Tabela 9 - Produtos *A* e *B* - Desconto Híbridos - Caso 1

Resultado - Q Contínuo		Resultado - Q Inteiro	
Q_a	4.000,000	Q_a	4.000
y_{a0}	0	y_{a0}	0
y_{a1}	0	y_{a1}	0
y_{a2}	1	y_{a2}	1
Q_b	15.000,000	Q_b	15.000
y_{b0}	0	y_{b0}	0
y_{b1}	1	y_{b1}	1
y_{b2}	0	y_{b2}	0
Iterações	783	*Iterações*	11.204
Custo Total	$ 75.872,290	*Custo Total*	$ 75.872,290

As considerações são as mesmas da Figura 8, com exceção do custo total.

h) Desconto Híbrido - Sobre Todas as Unidades: **Produto *A*** e Incremental: **Produto *B***

Tabela 10 - Produtos *A* e *B* - Desconto Híbridos - Caso 2

Resultado - Q Contínuo		Resultado - Q Inteiro	
Q_a	4.029,799	Q_a	4.028
y_{a0}	0	y_{a0}	0
y_{a1}	0	y_{a1}	0
y_{a2}	1	y_{a2}	1
Q_b	30.223,500	Q_b	30.210
y_{b0}	0	y_{b0}	0
y_{b1}	1	y_{b1}	1
y_{b2}	0	y_{b2}	0
Iterações	2706	*Iterações*	7524
Custo Total	$ 80.044,610	*Custo Total*	$ 80.044,610

As considerações são as mesmas da Figura 7, com exceção do custo total.

Conclusão

O presente artigo preenche uma lacuna no estudo de lotes econômicos de compra com descontos, demonstrando passo a passo a modelagem para um ou mais produtos que tenham o seu preço de aquisição afetado por descontos incrementais e/ou sobre todas as unidades com ajuda de exemplos numéricos. A adaptação do modelo para assumir situações em que seja necessário achar os lotes econômicos para produtos com diferentes tipos descontos mostrou-se bastante eficiente.

Referências

Benton, W.C & Park, S. (1996). A classification of literature on determining the lot size under quantity discounts. European Journal of Operational Research, nº92.

Bhattacharya, H. (2004). Working Capital Management: Strategies and Techniques. Prentice-Hall of India, 7th Edition.

Chopra, S. , Meindl, P. (2001). Supply Chain Management. London: Prentice Hall.

Erlenkotter, D. (1990). Ford Whitman Harris and the Economic Order Quantity Model. Operations Research. Vol 38, Nº 6, Novembro-Dezembro.

Taha, H. A. (2007). Pesquisa Operacional. Prentice Hall, 8ª Edição.