

UMA PROPOSTA DE RESOLUÇÃO PARA O PROBLEMA DE CARREGAMENTO DE MÚLTIPLOS CONTÊINERES HETEROGÊNEOS COM RESTRIÇÕES ADICIONAIS DE SEPARAÇÃO DE ITENS, ORIENTAÇÃO DAS CAIXAS E ESTABILIDADE VERTICAL DA CARGA¹

Cleder Marcos Schenekemberg^{a*}, Deidson Vitorio Kurpel^a,
Nathália Cristina Ortiz da Silva^a, Cassius Tadeu Scarpin^a

^aUniversidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba-PR, Brasil

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de resolução para o Problema de Carregamento de Múltiplos Contêineres Heterogêneos. O objetivo é empacotar caixas retangulares ortogonalmente e sem sobreposição dentro de um número limitado de contêineres, de modo a maximizar a ocupação do espaço disponível. Com base em propostas da literatura, este trabalho visa apresentar uma formulação matemática para o problema, por meio de um modelo de Programação Linear Inteira, que permite considerar as restrições práticas de separação de itens, orientação das caixas e estabilidade vertical da carga. Embora comum em situações do cotidiano, a restrição de separação de determinados itens em contêineres distintos é raramente tratada em trabalhos correlatos. Testes computacionais com instâncias da literatura foram efetuados para avaliar os modelos gerados. A análise dos resultados obtidos mostrou que, apesar da formulação proposta se limitar a resolver problemas com poucos tipos de caixas e/ou contêineres, a mesma descreve de modo adequado as considerações tratadas.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Problemas de Corte e Empacotamento, Carregamento de Contêineres.

Abstract

This paper presents a proposal to solve the Multiple Heterogeneous Container Loading Problem. The objective is to pack rectangular boxes, orthogonally and without overlapping, within a limited number of containers, so as to maximize the occupation of the available space. Based on literature proposals, an Integer Linear Programming model is presented, that allows us to consider practical constraints to separate items, box orientation and vertical stability of the load. Although the separation constraints are common in everyday situations, they are rarely approached in related works. Computational tests using instances from the literature were performed to evaluate the proposed models. The computational results show that the proposed model is adequate for the characteristics addressed in this paper despite solving problems with few containers and/or boxes.

Keywords: Mathematical Modelling, Cutting and Packing Problems, Container Loading.

*Autor para correspondência: e-mail: cledercms@hotmail.com

¹Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.

1. Introdução

O planejamento estratégico do transporte de matérias-primas e produtos acabados, ou ainda, a ausência de planejamento, pode impactar diretamente no custo associado às mercadorias destinadas aos consumidores. Assim, o uso eficiente de dispositivos de transporte para a movimentação de mercadorias é um fator essencial para o aumento da competitividade das empresas, visando a maximização dos lucros e a redução dos custos.

Este trabalho aborda o Problema de Carregamento de Contêineres (*Containers Loading Problem* - CLP). O CLP é um dos casos particulares de Problemas de Corte e Empacotamento (*Cutting and Packing Problems* – CPP). Para resolvê-lo, busca-se dispor caixas retangulares ortogonalmente dentro de contêineres, de tal modo que o volume ou valor associado à carga seja maximizado, ou em outros casos, que a quantidade de contêineres necessários para o carregamento seja minimizada.

Bischoff e Ratcliff (1995) enumeram doze considerações práticas comumente encontradas em situações reais, tais como estabilidade da carga, orientação das caixas e limitação de peso do contêiner, que podem ser incorporadas no carregamento da carga. Técnicas de resolução para o CLP podem ser obtidas em Mohanty *et al.* (1994), Chen *et al.* (1995), Gehring e Bortfeldt (1997), Pisinger (2002), Eley (2003), Hifi *et al.* (2010) e Junqueira *et al.* (2012).

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de formulação matemática para o CLP, com base em um modelo de Programação Linear Inteira capaz de considerar o carregamento de múltiplos contêineres distintos e as restrições práticas de separação de itens, orientação das caixas e estabilidade vertical da carga. Bortfeldt e Wäscher (2013) destacam que, apesar do recente aumento no número de publicações que tratam do CLP, ainda há considerações práticas pouco ou raramente abordadas, como, por exemplo, a restrição de separação de itens tratada neste artigo.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: a seção 2 compreende a descrição do problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos. A seção 3 apresenta a metodologia empregada para a resolução do problema, que consiste em um modelo Programação Linear Inteira e em um procedimento heurístico capaz de reduzir a complexidade da formulação proposta. Na seção 4, os resultados computacionais obtidos na avaliação dos modelos são apresentados e analisados. Por fim, na seção 5 são apresentadas as principais conclusões alcançadas, bem como perspectivas para trabalhos futuros.

2. Descrição do Problema

Na Pesquisa Operacional, os CPP's procuram determinar o melhor arranjo possível de unidades menores, chamadas itens, no interior de unidades maiores, denominadas objetos (Dyckhoff e Finke, 1992). Esta combinação, dentro de suas mais variadas versões, pode determinar o padrão de corte de peças para composição de itens encomendados, como também o empacotamento de caixas em contêineres. Aplicações destes problemas são comuns no cotidiano e surgem, por exemplo, ao efetuar corte de vidros, bobinas de papel e chapas de aço e ao realizar o carregamento de caminhões, trens, navios e aviões.

Wäscher *et al.* (2007) combinam critérios básicos, como dimensionalidade, variedade dos itens, variedade dos objetos, forma dos itens e tipo de designação (minimização ou maximização) para classificar os CPP's e, conseqüentemente, os CLP's.

Este trabalho aborda o carregamento de múltiplos contêineres distintos. Com base na tipologia de Wäscher *et al.* (2007), este problema pode ser dividido em dois novos subproblemas de acordo com a variedade dos itens. O primeiro, chamado *Multiple Heterogeneous Knapsack Problem (MHKP)*, visa carregar um subconjunto de caixas fortemente heterogêneas em um conjunto de contêineres heterogêneos, isto é, contêineres não idênticos, tal que o volume ou valor total associado às caixas carregadas seja maximizado. Já o segundo, conhecido como *Multiple Heterogeneous Large Object Placement Problem (MHLOPP)*, tem por objetivo empacotar um subconjunto de caixas fracamente heterogêneas em um conjunto de contêineres heterogêneos, tal que o volume ou valor total associado às caixas carregadas seja maximizado.

3. Metodologia Proposta

3.1 Modelo Matemático

Junqueira *et al.* (2012) apresentam um modelo matemático baseado em Programação Linear Inteira para o carregamento de um único contêiner. Na sequência deste trabalho, por meio de adaptações, esta formulação será estendida de forma a considerar o carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos, isto é, não idênticos.

Sejam c tipos de contêineres com largura L_k , comprimento W_k , altura H_k e disponibilidade d_k (onde $1 \leq k \leq c$), que devem ser carregados com m tipos de caixas distintas. Cada caixa do tipo i , $i = 1, \dots, m$, que pode ser alocada no interior de um dos contêineres do tipo k , tem largura l_i , comprimento w_i , altura h_i e volume (ou valor

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

associado à caixa) v_i . Existe um total de b_i caixas do tipo i que podem ser arranjadas nos contêineres. Logo, o problema é restrito quanto ao número de itens disponíveis para carregamento.

Tomando o sistema de coordenadas cartesiano, seja (p, q, r) o vértice inferior frontal esquerdo de uma caixa qualquer no interior de um contêiner do tipo k (Figura 1).

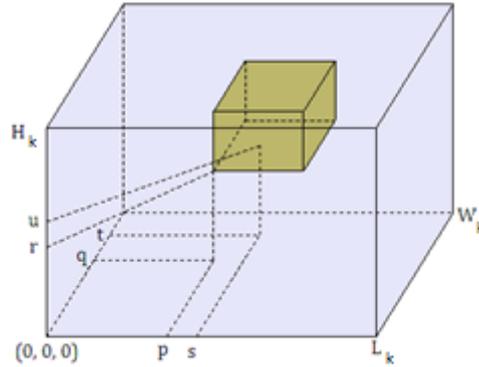


Figura 1 - Uma caixa do tipo i alocada no vértice (p, q, r) de um contêiner do tipo k .

Os conjuntos a seguir, adaptados de Junqueira *et al.* (2012), indicam as possíveis posições que uma caixa i (onde $i = 1, \dots, m$) pode assumir em relação às dimensões do(s) contêiner(es) do tipo k . A princípio, supõe-se que os itens possuem orientação fixa, isto é, a largura, comprimento e altura dos itens devem ser paralelos às respectivas dimensões do contêiner designado, impossibilitando o movimento de rotação das caixas dentro dos contêineres.

$$X_k = \{p | 0 \leq p \leq L_k - \min_i(l_i), \quad p \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (1)$$

$$Y_k = \{q | 0 \leq q \leq W_k - \min_i(w_i), \quad q \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (2)$$

$$Z_k = \{r | 0 \leq r \leq H_k - \min_i(h_i), \quad r \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, \dots, m\} \quad (3)$$

Considere ainda os conjuntos:

$$X_{ik} = \{p \in X_k | 0 \leq p \leq L_k - l_i\} \quad (4)$$

$$Y_{ik} = \{q \in Y_k | 0 \leq q \leq W_k - w_i\} \quad (5)$$

$$Z_{ik} = \{r \in Z_k | 0 \leq r \leq H_k - h_i\} \quad (6)$$

Embora os elementos dos conjuntos acima sejam restritos a valores inteiros, essa condição pode ser facilmente relaxada. As variáveis de decisão do modelo são do tipo binário, definidas da seguinte maneira:

$$x_{ijkpqr} = \begin{cases} 1, & \text{Se uma caixa do tipo } i \text{ tem seu vértice inferior frontal} \\ & \text{esquerdo no ponto } (p, q, r) \text{ do } j\text{-ésimo contêiner do tipo } k, \\ & \text{tal que: } 0 \leq p \leq L_k - l_i, \quad 0 \leq q \leq W_k - w_i, \\ & \quad 0 \leq r \leq H_k - h_i, \quad 1 \leq j \leq d_k; \\ 0, & \text{Caso contrário} \end{cases} \quad (7)$$

A formulação matemática para o Problema de Carregamento de Múltiplos Contêineres Heterogêneos, obtida a partir do modelo de carregamento de um único contêiner de Junqueira *et al.* (2012) e denominada modelo base ao longo deste trabalho, é apresentada a seguir.

$$\text{Maximizar} \quad Z = \sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=1}^m \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} v_i \cdot x_{ijkpqr} \quad (8)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\{p \in X_{ik} | s - l_i + 1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_{ik} | t - w_i + 1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_{ik} | u - h_i + 1 \leq r \leq t\}} x_{ijkpqr} \leq 1, \quad (9)$$

$$s \in X_k, t \in Y_k, u \in Z_k, k = 1, \dots, c, j = 1, \dots, d_k$$

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{ijkpqr} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (10)$$

$$x_{ijkpqr} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad p \in X_{ik}, \quad q \in Y_{ik}, \quad r \in Z_{ik}, \quad (11)$$

$$k = 1, \dots, c, \quad j = 1, \dots, d_k.$$

A função objetivo (8) visa maximizar o volume (valor) das caixas empacotadas nos contêineres disponíveis. As restrições (9) evitam a sobreposição de caixas nos contêineres, impedindo a ocupação de um ponto (s, t, u) qualquer no interior de uma caixa cujo vértice

inferior frontal esquerdo é o ponto (p, q, r) por uma caixa distinta (veja Figura 1). As expressões (10) impedem que caixas sejam carregadas além da disponibilidade máxima permitida. Por fim, em (11) define-se o domínio das variáveis de decisão.

3.1.1 Consideração Prática de Separação de Itens

De acordo com Bischoff e Ratcliff (1995), exigências de separação de itens estão relacionadas a caixas que não podem ser empacotadas lado-a-lado, dividindo alguma superfície no mesmo contêiner. Eley (2003) estende este conceito, afirmando que tal consideração prática demanda que itens de dois (ou mais) tipos não sejam carregados no mesmo contêiner como, por exemplo, produtos alimentícios e agrotóxicos. Neste artigo, considera-se que estes tipos de itens são conflitantes, isto é, não podem ser carregados no mesmo contêiner.

Hifi e Michrafy (2007), Epstein *et al.* (2008) e Muritiba *et al.* (2010) abordam esta consideração prática utilizando um grafo de conflito $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, onde $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, m\}$ é o conjunto de itens a serem carregados e \mathcal{E} é um conjunto de arestas $(i', i'') \in \mathcal{E}$ caso os itens i' e i'' são conflitantes. Já Eley (2003) apresenta uma proposta que integra uma formulação matemática com um procedimento heurístico capaz de gerar padrões de carregamento.

Na proposta de formulação matemática deste trabalho, define-se um conjunto, denotado por B , que é formado apenas pelos tipos de itens, entre os m tipos disponíveis, que devem ser obrigatoriamente alocados em contêineres distintos, onde a variável binária $y_{\theta jk}$ assume valor 1 se exemplares de caixas do tipo $\theta \in B$ serão alocadas no j -ésimo contêiner do tipo k , ou tem valor 0, caso contrário. Cabe destacar que os demais tipos de caixas, isto é, que não pertençam ao conjunto B , podem ser empacotados em qualquer dos contêineres disponíveis.

Em seu estado atual, a formulação admite apenas um conjunto de caixas que devem, necessariamente, ser embarcadas em contêineres separados. No entanto, a formulação pode ser facilmente modificada de modo que múltiplos conjuntos de itens conflitantes sejam considerados simultaneamente.

A formulação matemática da restrição prática de separação de itens é dada por:

$$\sum_{p \in X_{\theta k}} \sum_{q \in Y_{\theta k}} \sum_{r \in Z_{\theta k}} x_{\theta jkpqr} \leq b_{\theta} \cdot y_{\theta jk}, \quad \theta \in B, k = 1, \dots, c, j = 1, \dots, d_k \quad (12)$$

$$\sum_{\theta \in B} y_{\theta jk} \leq 1, \quad k = 1, \dots, c, \quad j = 1, \dots, d_k \quad (13)$$

Onde $y_{\theta jk} \in \{0, 1\}$, $\theta \in B, k = 1, \dots, c, j = 1, \dots, d_k$. (14)

As restrições (12) e (13) garantem que, no máximo, um tipo de caixa do conjunto B pode ser carregado no j -ésimo contêiner do tipo k , enquanto em (14), define-se o domínio das variáveis de decisão.

3.1.2 Consideração Prática de Estabilidade Vertical

A restrição de estabilidade pode ser dividida em estabilidade vertical, que exige que um percentual mínimo da base das caixas tenha apoio de outros itens ou do piso do contêiner, de modo que os itens resistam a ação da força de gravidade, e estabilidade horizontal, que estabelece um percentual de adjacência das laterais das caixas com outros itens ou com as paredes do contêiner, de maneira que movimentos significativos quando o contêiner é manuseado sejam impedidos.

A estabilidade é uma das mais importantes considerações práticas que podem ser incorporadas no carregamento da carga, uma vez que cargas estáveis evitam danos aos produtos durante o transporte e garantem a segurança dos operadores, especialmente durante o procedimento de carga/descarga.

O coeficiente de estabilidade α , que indica a porção mínima exigida para suporte dos itens, é comumente encontrado na literatura de carregamento de contêineres. De acordo com Eley (2002), se por um lado $\alpha = 1$ exige que 100% das faces inferiores das caixas (no caso de estabilidade vertical) estejam apoiadas, quando $\alpha = 0$ a exigência quanto à estabilidade das caixas é desconsiderada, isto é, as caixas podem estar parcialmente apoiadas ou flutuando dentro dos contêineres.

Deve-se ressaltar que o coeficiente α , embora indique a área de apoio mínimo das caixas, não garante a estabilidade da carga quando a mesma está sujeita a ação de forças externas, tais como velocidade, aceleração e oscilações do veículo. Procedimentos mais rigorosos, que exigem que a soma de momentos e a soma de forças sejam nulas são tratados por Silva *et al.* (2003), Queiroz e Miyazawa (2014) e Ramos *et al.* (2016).

A formulação matemática descrita a seguir foi originalmente apresentada por Junqueira *et al.* (2012) para considerar a estabilidade vertical da carga no processo de carregamento de um único contêiner.

A restrição de estabilidade vertical para o carregamento de múltiplos contêineres passa a ser descrita da seguinte maneira:

$$\sum_{\{i|r'-h_i \geq 0\}}^m \sum_{\{p \in X_{ik} | p' - l_i + 1 \leq p \leq p' + l_a - 1\}} \sum_{\{q \in Y_{ik} | q' - w_i + 1 \leq q \leq q' + w_a - 1\}} L_{ia} \cdot W_{ia} \cdot X_{ijkpq}(r' - h_i) \geq \alpha \cdot l_a \cdot w_a \cdot X_{ajkp'q'r'} \quad (15)$$

$$\text{com } \begin{cases} L_{ia} = \min(p + l_i, p' + l_a) - \max(p, p') \\ W_{ia} = \min(q + w_i, q' + w_a) - \max(q, q') \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{onde } a = 1, \dots, m, p' \in X_{ak}, q' \in Y_{ak}, r' \in Z_{ak} - \{0\}, \forall k = 1, \dots, c \text{ e } \forall j = 1, \dots, d_k \quad (17)$$

As expressões (15)-(17) garantem o suporte da face inferior de uma caixa do tipo a posicionada no ponto (p', q', r') do j -ésimo contêiner do tipo k . Este suporte é oferecido por uma caixa do tipo i (inclusive $i = a$) que se encontra localizada na posição (p, q, r) dentro do contêiner, onde $r = r' - h_i$.

3.1.3 Consideração Prática de Orientação das Caixas

Algumas caixas podem ser rotacionadas em sentidos específicos dentro do contêiner como, por exemplo, caixas que contenham informação do tipo “este lado para cima”. O modelo base, definido pelas equações (8)-(11), considera apenas padrões de carregamento contendo caixas com orientação fixa. Na literatura, é comum encontrar três tipos básicos de orientação das caixas: orientação fixa (ver Miyazawa e Wakabayashi (1997), Martello *et al.* (2000) e Junqueira *et al.* (2012), por exemplo), no plano (ver Gendreau *et al.* (2006) e Iori e Martello (2010), por exemplo) e geral (ver Wang *et al.* (2008), por exemplo).

As caixas possuem orientação fixa quando não podem ser rotacionadas em torno de seus eixos. A orientação no plano é observada quando uma dimensão particular da caixa é pré-fixada como a altura, enquanto nenhuma restrição é imposta na direção horizontal, isto é, determinada caixa pode rotacionar 90 graus no plano do contêiner. Por fim, caixas que possuem orientação geral podem ser rotacionadas em torno de qualquer um de seus eixos,

assumindo até seis posições dentro do contêiner. A abordagem proposta neste trabalho considera apenas caixas com orientação no plano.

Segundo Junqueira *et al.* (2012), para adaptar o modelo base para considerar rotações no plano, cada orientação possível de uma caixa do tipo i pode ser vista como um novo tipo de item, isto é, uma caixa do tipo i ($i = 1, \dots, m$) pode ser decomposta em dois novos itens com dimensões (l_i, w_i, h_i) e (w_i, l_i, h_i) , uma vez que apenas a altura da caixa deve permanecer fixa. Desta forma, o modelo base passa a ter $2m$ tipos de itens distintos e pode ser reescrito como:

$$\text{Maximizar } Z = \sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=1}^{2m} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} v_i \cdot x_{ijkpqr} \quad (18)$$

Sujeito a

$$\sum_{i=1}^{2m} \sum_{\{p \in X_{ik} | s-l_i+1 \leq p \leq s\}} \sum_{\{q \in Y_{ik} | t-w_i+1 \leq q \leq t\}} \sum_{\{r \in Z_{ik} | u-h_i+1 \leq r \leq u\}} x_{ijkpqr} \leq 1, \quad (19)$$

$$s \in X_k, t \in Y_k, u \in Z_k, j = 1, \dots, d_k, k = 1, \dots, c$$

$$\sum_{k=1}^c \sum_{j=1}^{d_k} \sum_{i=(2\hat{i}-1)}^{2\hat{i}} \sum_{p \in X_{ik}} \sum_{q \in Y_{ik}} \sum_{r \in Z_{ik}} x_{ijkpqr} \leq b_{\hat{i}}, \quad \hat{i} = 1, \dots, m \quad (20)$$

$$x_{ijkpqr} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, 2m, \quad p \in X_{ik}, \quad q \in Y_{ik}, \quad r \in Z_{ik}, \quad (21)$$

$$k = 1, \dots, c \quad \text{e } j = 1, \dots, d_k$$

Observe-se que nas expressões (18) e (19) o índice i varia até $2m$. Por outro lado, em (20) o índice \hat{i} varia apenas até m . Além disso, (20) possui um somatório adicional em relação ao modelo base definido por (8)-(11). Estes ajustes se fazem necessários, visto que um determinado tipo de item i foi decomposto em duas novas caixas, devendo, deste modo, compartilhar a mesma restrição de limitação de caixas.

3.2 Algoritmo Gerador de Números Úteis

O modelo base e as restrições práticas consideradas apresentadas nas seções anteriores foram formulados levando em conta os conjuntos (1)-(6) como pontos candidatos a vértice

das caixas. No entanto, como estes conjuntos possuem todas as possíveis posições que uma caixa pode assumir ao longo dos eixos de um contêiner, apenas problemas pouco realísticos podem ser resolvidos dentro de um limite de tempo aceitável.

O Algoritmo Gerador de Números Úteis (AGNU), que visa diminuir a quantidade de elementos destes conjuntos, foi elaborado com base na heurística proposta por Carnieri *et al.* (1994) para abordar o problema de corte bidimensional guilhotinado de chapas de madeira. Este, por sua vez, é equivalente às combinações cônicas ou padrões normais apresentados por Herz (1972) e Christofides e Whitlock (1977), diferindo apenas no processo de geração dos valores. De acordo com Junqueira *et al.* (2012), a adoção dos conjuntos obtidos por meio desse procedimento na formulação matemática do CLP não acarreta na perda da solução ótima.

Para descrever o algoritmo, considere um contêiner genérico do tipo k com dimensões (L_k, W_k, H_k) , que deve ser carregado com m tipos de caixas de diferentes tamanhos, ou seja, (l_i, w_i, h_i) , para $i = 1, \dots, m$. Por simplicidade, considera-se que as caixas possuem orientação fixa. Em sua formulação original, o AGNU comporta apenas o caso unidimensional. Sendo assim, o algoritmo deve ser reaplicado em cada eixo de cada tipo de contêiner. A Figura 2 apresenta o pseudocódigo do AGNU quando aplicado ao eixo X de um contêiner do tipo k .

Passo 1.	Calcule $\beta = \min \{l_i, i = 1, 2, \dots, m\}$. Defina $X_k^{(m+1)} = F^{(m+1)} = \{0\}$, e faça $g = m$.
Passo 2.	Calcule $F^{(g)} = \{x + \lambda \cdot l_g \mid x \in X_k^{(g+1)}, \lambda = 1, 2, \dots, \text{e } L_k - (x + \lambda \cdot l_g) \geq \beta\}$.
Passo 3.	Faça $X_k^{(g)} = F^{(g)} \cup X_k^{(g+1)}$. Remova os números equivalentes de $X_k^{(g)}$.
Passo 4.	Se $g > 1$, faça $g \leftarrow g - 1$ e volte ao Passo 2 . Caso contrário, pare. O conjunto $X_k^{(1)}$, ou simplesmente X_k , contém a lista dos números úteis do contêiner do tipo k gerados a partir do eixo X .

Figura 2 - Pseudocódigo do algoritmo gerador de números úteis.

No pseudocódigo acima, o Passo 1 determina o menor comprimento entre todas as caixas disponíveis, denominado β e, além disso, o primeiro número útil é definido como a coordenada nula do eixo X . No Passo 2, a partir da caixa do tipo g , $1 \leq g \leq m$, e dos números úteis determinados, devem ser obtidos os pontos de vértices ao longo de L_k ,

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

adicionando λ comprimentos de caixa ($\lambda = 1, 2, \dots$), desde que o tamanho remanescente do contêiner seja suficiente para posicionar uma caixa com comprimento β . No Passo 3, os números úteis obtidos são adicionados ao conjunto $X_k^{(g)}$, removendo os elementos repetidos. O critério de parada do algoritmo é satisfeito quando $g = 1$, onde o conjunto $X_k^{(1)}$ é composto pelos números úteis do comprimento do contêiner. Os conjuntos gerados pelo AGNU serão denotados por \bar{X}_k , \bar{Y}_k e \bar{Z}_k para diferenciá-los daqueles obtidos pelas definições (1)-(3).

Para exemplificar a aplicação do AGNU, considere um contêiner com dimensões $(L_k, W_k, H_k) = (20, 15, 15)$, que deve ser carregado com três tipos de caixas, de dimensões $(l_1, w_1, h_1) = (7, 5, 3)$, $(l_2, w_2, h_2) = (5, 6, 5)$ e $(l_3, w_3, h_3) = (8, 6, 3)$.

Após a execução do algoritmo, os conjuntos de números úteis a seguir foram gerados:

$$\bar{X}_k = \{0; 5; 7; 8; 10; 12; 13; 14; 15\} \quad (22)$$

$$\bar{Y}_k = \{0; 5; 6; 10\} \quad (23)$$

$$\bar{Z}_k = \{0; 3; 5; 6; 8; 10; 11; 12\} \quad (24)$$

Em contrapartida, abaixo são apresentados os conjuntos gerados sem o uso do AGNU, isto é, pela definição (1)-(3):

$$X_k = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\} \quad (25)$$

$$Y_k = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \quad (26)$$

$$Z_k = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\} \quad (27)$$

Com base na quantidade dos elementos dos conjuntos (22)-(24) e (25)-(27), fica evidente que um modelo gerado com o uso do AGNU deve apresentar um número consideravelmente menor de restrições e variáveis binárias. No presente exemplo, a primeira formulação seria composta por 603 variáveis binárias e 324 restrições de não sobreposição, enquanto que, sem o uso do AGNU, este mesmo modelo seria formado por 5.452 e 2.288, respectivamente. Desta forma, a utilização do AGNU na geração dos modelos pode levar a

significativos ganhos de desempenho do método de solução empregado, visto que permite gerar modelos substancialmente menores.

Na Figura 3 são ilustrados os planos da base do contêiner gerados pelos pares de conjuntos (22)-(23) e (25)-(26), respectivamente. Cabe destacar que o plano da base cortará o eixo *Z* do contêiner nos pontos dos conjuntos (24) (com AGNU) e (27) (sem AGNU), respectivamente.

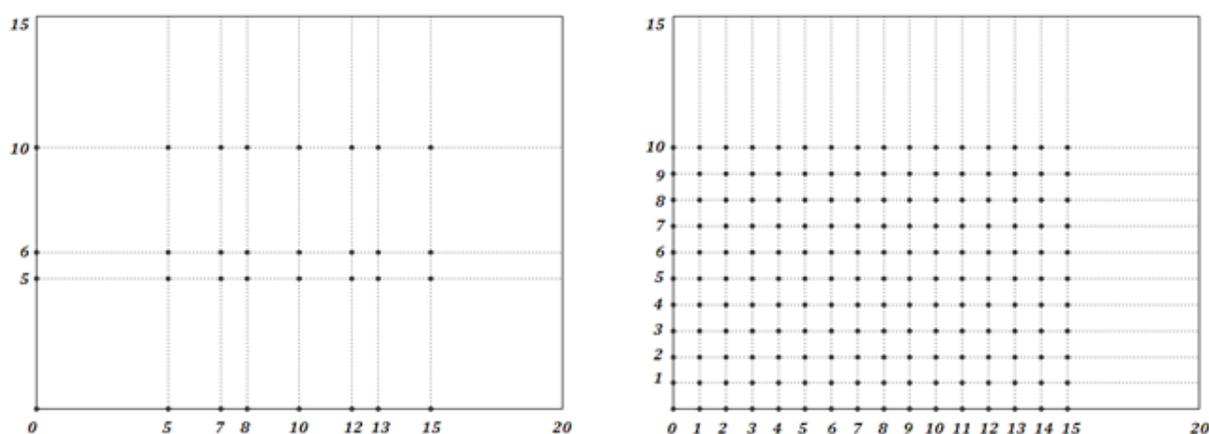


Figura 3 - Representação dos planos da base de um contêiner obtidos respectivamente com o AGNU (à esquerda) e sem o AGNU (à direita).

4. Testes Computacionais

Para avaliar a formulação proposta, foram gerados modelos utilizando um algoritmo em linguagem de programação *Visual Basic.NET* e resolvidos por meio do *software* de otimização *CPLEX® Interactive Optimizer* (versão 12.6.0.0), com parâmetros padrão. Os testes foram efetuados em um computador com sistema operacional *Microsoft Windows 8* (64 bits), processador *Intel® Core™ i5-4200U CPU @ 1,60 GHz* e memória *RAM* de 8GB. Um limite de tempo de 86.400 segundos (24 horas) foi estabelecido para a execução dos testes.

Três cenários foram considerados na avaliação da formulação proposta. No Cenário 1 (C1) o modelo foi definido pelas expressões (18)-(21), gerado com o uso do AGNU e com restrição adicional de rotação das caixas no plano. O Cenário 2 (C2) considerou as expressões (15)-(21), foi gerado com o uso do AGNU e com restrições adicionais de rotação das caixas no plano e estabilidade vertical. Por fim, no Cenário 3 (C3) o modelo utilizou as expressões (12)-(21), foi gerado com o uso do AGNU e com restrições adicionais de rotação das caixas no plano, separação de itens e estabilidade vertical.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Os testes foram efetuados com os conjuntos de dados gerados aleatoriamente por Mohanty *et al.* (1994). A instância consiste em 16 conjuntos de testes, que indicam os tipos (i , onde $i = 1, \dots, m$) e a disponibilidade (b_i) das caixas, bem como o valor associado (f_i) e as dimensões (l_i, w_i, h_i) de cada item, e também os tipos (c) e a disponibilidade (d_k , onde $1 \leq k \leq c$) de cada contêiner. Quanto às caixas, os conjuntos de teste possuem no mínimo 2 e no máximo 6 tipos distintos, com disponibilidade variando de 47 a 200 caixas. Já quanto aos contêineres, há de 2 a 3 tipos distintos, com disponibilidade variando de 2 a 15 contêineres.

Dois tipos de solução foram obtidos na realização dos testes: solução ótima, com *gap* de otimalidade nulo, ou solução não ótima, com *gap* de otimalidade não nulo e limite de tempo excedido para resolver o problema. O *gap* de otimalidade é dado pela expressão:

$$gap = \frac{(\text{melhor limitante obtido}) - (\text{melhor valor obtido})}{(\text{melhor limitante obtido})} \cdot 100\% \quad (28)$$

O termo v_i da função objetivo indica o valor associado à caixa do tipo i ($i = 1, \dots, m$), que pode ser obtido por $v_i = f_i \cdot (l_i \cdot w_i \cdot h_i)$, onde f_i representa o valor por unidade de volume. Para os cenários C2 e C3, considerou-se o coeficiente de estabilidade vertical $\alpha = 1$. Seguindo a metodologia proposta por Eley (2003), para testar o cenário C3, optou-se por separar as caixas do tipo 1 e 2 em contêineres distintos.

A Tabela 1 apresenta um sumário dos resultados obtidos após a realização dos testes. Uma breve análise mostra que, dos 48 testes efetuados, sendo 16 exemplos para cada cenário considerado, em nove casos a solução ótima (*gap* nulo) não foi alcançada dentro do limite de tempo especificado. Em todos os cenários testados os conjuntos de testes 8, 9 e 16 excederam o tempo limite de resolução.

Quanto ao tempo necessário para a resolução dos modelos temos que, no cenário C1 o tempo médio decorrido foi de 16.247,86 segundos, com desvio padrão de 33.700,43 segundos. Já para os cenários C2 e C3, o tempo médio de resolução foi de 16.262,00 segundos (com desvio padrão de 33.396,57) e 16.287,96 segundos (com desvio padrão de 33.681,80), respectivamente. Destes valores cabe destacar que as restrições práticas de estabilidade vertical e de separação de itens não impactaram diretamente no tempo computacional de resolução, dado que os cenários C2 e C3 obtiveram tempo médio de

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

resolução aproximadamente idêntico ao valor médio resultante do cenário C1.

Quanto à função objetivo (Z), a inclusão das considerações práticas de estabilidade vertical e de separação de itens levou a um decréscimo nos valores obtidos em comparação com o cenário que não considera tais restrições. No conjunto de teste 15, por exemplo, os valores da função objetivo foram 33.495,40 no cenário C1, 32.891,50 no cenário C2 e 32.400,90 no cenário C3. Cabe destacar que, nos três cenários avaliados com o conjunto de teste 15, obteve-se a solução ótima. De modo geral, embora a otimalidade não tenha sido alcançada em todos os conjuntos testados, o valor médio de Z foi de 187.504,38, com desvio padrão de 337.534,20 no cenário C1, enquanto em C2 e C3, os valores médios da função objetivo foram de 177.719,47 (com desvio padrão de 328.949,73) e 170.145,03 (com desvio padrão de 324.797,88), respectivamente. Em termos percentuais, a ocupação dos contêineres nos conjuntos de teste em C2 foi de aproximadamente 94,78% em relação a C1, enquanto a ocupação média dos contêineres em C3 foi de 90,74% quando comparados ao primeiro cenário.

Tabela 1: Resultados obtidos com os testes efetuados.

Fonte: Os autores

Conjunto de Teste	Cenário 1			Cenário 2			Cenário 3		
	Z	gap (%)	Tempo (s)	Z	gap (%)	Tempo (s)	Z	gap (%)	Tempo (s)
1	6.528,00	0,00	0,25	6.528,00	0,00	0,08	5.760,00	0,00	0,06
2	81.088,00	0,00	1,19	80.524,80	0,00	7,56	80.524,80	0,00	2,84
3	52.325,00	0,00	3,64	52.325,00	0,00	1,19	52.000,00	0,00	4,98
4	1.354.752,00	0,00	0,08	1.354.752,00	0,00	0,03	1.354.752,00	0,00	0,03
5	377.500,00	0,00	0,16	377.500,00	0,00	0,27	377.500,00	0,00	0,22
6	126.336,00	0,00	0,83	126.336,00	0,00	7,83	123.840,00	0,00	10,30
7	15.882,00	0,00	4,30	15.882,00	0,00	4,16	15.882,00	0,00	5,22
8	62.962,60	0,02	86.400,00	53.416,60	0,18	86.400,00	52.076,40	0,21	86.400,00
9	119.970,00	0,03	86.400,00	114.156,00	0,08	86.400,00	111.240,00	0,11	86.400,00
10	11.264,00	0,00	0,19	11.264,00	0,00	0,09	11.264,00	0,00	0,13
11	42.955,40	0,00	12,53	41.596,00	0,00	19,69	41.596,00	0,00	18,09
12	21.096,00	0,00	21,13	21.096,00	0,00	28,70	20.232,00	0,00	1.118,36
13	36.556,80	0,00	5,77	36.556,80	0,00	305,45	28.953,60	0,00	10,84
14	61.588,80	0,00	0,44	61.588,80	0,00	0,98	59.914,80	0,00	8,75
15	33.495,40	0,00	715,26	32.891,50	0,00	615,99	32.400,90	0,00	227,59
16	595.770,00	0,02	86.400,00	457.098,00	0,32	86.400,00	354.384,00	650	86.400,00
Média	187.504,38	/	16.247,86	177.719,47	/	16.262,00	170.145,03	/	16.287,96
Desvio Padrão	337.534,20	/	33.700,43	328.949,73	/	33.693,57	324.797,88	/	33.681,80

As Figuras 4, 5 e 6 ilustram, respectivamente, os padrões de carga obtidos para o conjunto de teste 12 gerado de acordo com os cenários C1, C2 e C3. Destaca-se que para

este conjunto de dados a solução ótima foi alcançada em todos os cenários avaliados. Para a ilustração dos itens, adotou-se o seguinte esquema de cores: caixa do tipo 1 - cinza; caixa do tipo 2 - azul e caixa do tipo 3 - verde. Cabe lembrar que, para o cenário C3, as caixas do tipo 1 e 2 devem ficar obrigatoriamente separadas em contêineres distintos.

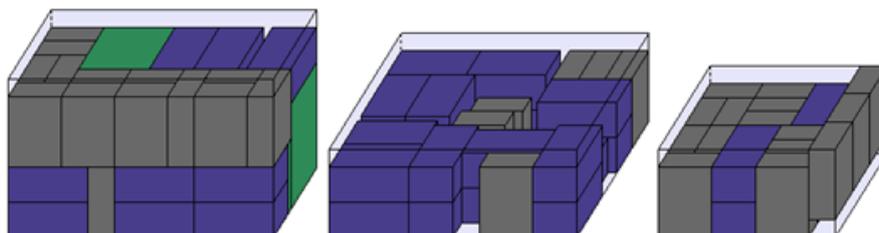


Figura 4 – Padrão de carregamento do conjunto de teste 12 resolvido de acordo com o cenário C1.

Os padrões de carga do conjunto de teste 12 gerados de acordo com os cenários C1 e C2, foram obtidos com alocação de 35 caixas do tipo 1, 40 caixas do tipo 2 e 03 caixas do tipo 3, totalizando em $Z = 21.096$. Já para o cenário C3, por sua vez, foram alocadas as mesmas quantidades de caixas do tipo 1 e 2 dos padrões anteriores, com exceção da caixa do tipo 3, que teve apenas 2 exemplares designados, resultando em $Z = 20.232$.

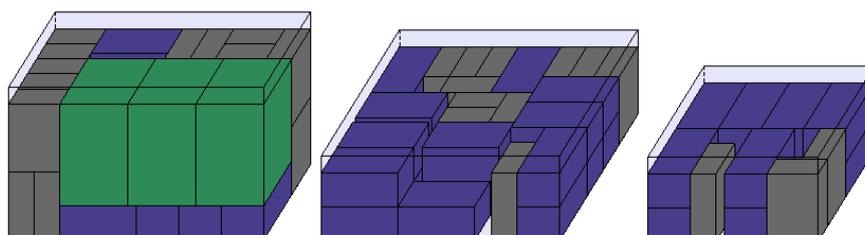


Figura 5 - Padrão de carregamento do conjunto de teste 12 resolvido de acordo com o cenário C2.

Com base na Figura 4, pode-se perceber que existem caixas sem nenhum apoio (ver o contêiner à direita). Este fato já era esperado, visto que a restrição adicional de estabilidade vertical não foi considerada neste cenário. Em contrapartida, percebe-se que para os cenários C2 e C3 todas as caixas alocadas possuem a face inferior completamente suportada pelos demais itens ou pelo piso do contêiner (Figuras 5 e 6). Por fim, por meio da Figura 6, que ilustra o padrão de carga do cenário C3, pode-se destacar que, embora o valor da função objetivo tenha decrescido, a finalidade de separar as caixas do tipo 1 e 2 em

contêineres distintos foi satisfeita.

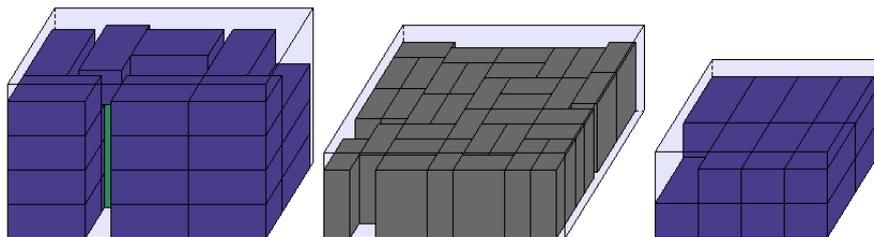


Figura 6 - Padrão de carregamento do conjunto de teste 12 resolvido de acordo com o cenário C3.

5. Considerações Finais

Neste trabalho apresentou-se uma proposta de resolução para o problema de carregamento de múltiplos contêineres heterogêneos. Esta abordagem foi testada por meio do *software* de otimização *CPLEX* e, embora limitada a resolver problemas de complexidade moderada, descreveu de modo satisfatório as condições tratadas.

Os resultados computacionais obtidos mostram que a abordagem proposta é capaz de resolver, em tempo computacional aceitável, apenas problemas com poucos tipos de caixas e/ou contêineres. No entanto, esta formulação pode servir de motivação para futuras pesquisas que explorem outros métodos de resolução, como procedimentos heurísticos, meta-heurísticos, métodos de relaxação, entre outros. Além disso, podem-se explorar formas alternativas aos conjuntos (1)-(6), de modo a diminuir a quantidade de elementos e, conseqüentemente, a complexidade dos modelos; estender a formulação proposta para considerar os mais variados tipos de CLP's; expandir a modelagem para abordar restrições práticas não tratadas neste trabalho, como restrição adicional de manuseio, prioridades de envio e distribuição de peso dentro do contêiner e, por fim, testar combinações distintas de parâmetros para o *software* de otimização *CPLEX*, visto que neste trabalho optou-se por um conjunto de parâmetros padrão.

Referências

- Bischoff, E. E.; Ratcliff, M. S. W. (1995). Issues in the development of approaches to container loading. *Omega*, v. 23, n. 4, p. 377-390.
- Bortfeldt, A.; Wäscher, G. (2013). Constraints in container loading – A state-of-the-review. *European Journal of Operational Research*, v. 229, n. 1, p. 1-20.
- Carnieri, C.; Mendoza, G. A.; Gavinho, L. G. (1994). Solution procedures for cutting lumber into furniture parts. *European Journal of Operational Research*, v. 73, n. 3, p. 495-501.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

- Chen, C. S.; Lee, S. M.; Shen, Q. S. (1995). An analytical model for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, v. 80, n. 1, p. 68-76.
- Christofides, N.; Whitlock, C. (1977). An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research*, v. 25, n. 1, p. 30-44.
- Dyckhoff, H.; Finke, U. (1992). *Cutting and paking in production and distribution: typology and bibliography*. Heidelberg: Springer-Verlag Berlin.
- Eley, M. (2002). Solving container loading problems by block arrangement. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 393-409.
- Eley, M. (2003). A bottleneck assignment approach to the multiple container loading problem. *OR Spectrum*, v. 25, n. 1, p. 45-60.
- Epstein, L.; Levin, A.; Stee, R. (2008). Two-dimensional packing with conflicts. *Acta Informatica*, v. 45, n. 3, p. 155-175.
- Gehring, H.; Bortfeldt, A. (1997). A genetic algorithm for solving the container loading problem. *International Transactions in Operational Research*, v. 4, n. 5-6, p. 401-418.
- Gendreau, M.; Iori, M.; Laporte, G.; Martello, S. (2006). A tabu search algorithm for a routing and container loading problem. *Transportation Science*, v. 40, n. 3, p. 342-350.
- Herz, J. C. (1972). Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *IBM Journal of Research and Development*, v. 16, n. 5, p. 462-469.
- Hifi, M.; Kacem, I.; Nègre, S.; Wu, L. (2010). A linear programming approach for the three-dimensional bin-packing problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 36, p. 993-1000.
- Hifi, M.; Michrafy, M. (2007). Reduction strategies and exact algorithms for the disjunctively constrained knapsack problem. *Computers & Operations Research*, v. 34, n. 9, p. 2657-2673.
- Iori, M.; Martello, S. (2010). Routing problems with loading constraints. *Top*, v. 18, n. 1, p. 4-27.
- Junqueira, L.; Morabito, R.; Yamashita, D. S. (2012). Three-dimensional container loading models with cargo stability and load bearing constraints. *Computers & Operations Research*, v. 39, n. 1, p. 74-85.
- Martello, S.; Pisinger, D.; Vigo, D. (2000). The three-dimensional bin packing problem. *Operations Research*, v. 48, n. 2, p. 256-267.
- Miyazawa, F. K.; Wakabayashi, Y. (1997). An algorithm for the three-dimensional packing problem with asymptotic performance analysis. *Algorithmica* v. 18, n. 1, p. 122-144.
- Mohanty, B. B.; Mathur, K.; Ivancic, N. J. (1994). Value considerations in three-dimensional packing – A heuristic procedure using the fractional knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, v. 74, n. 1, p. 143-151.
- Muritiba, A. E. F.; Iori, M.; Malaguti, E.; Toth, P. (2010). Algorithms for the bin packing problem with conflicts. *INFORMS Journal on Computing*, v. 22, n. 3, p. 401-415.
- Pisinger, D. (2002). Heuristics for the container loading problem. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 382-392.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Queiroz, T. A.; Miyazawa, F. K. (2014). Order and static stability into the strip packing problem. *Annals of Operations Research*, v. 223, n. 1, p. 137-154.

Ramos, A. G.; Oliveira, J. F.; Lopes, M. P. (2016). A physical packing sequence algorithm for the container loading problem with static mechanical equilibrium conditions. *International Transactions in Operational Research*, v. 23, n. 1-2, p. 215-238.

Silva, J. L. C.; Soma, N. Y.; Maculan, N. (2003). A greedy search for the three-dimensional bin packing problem: the packing static stability case. *International Transactions in Operational Research*, v. 10, n. 2, p. 141-153.

Wang, Z.; Li, K. W.; Levy, J. K. (2008). A heuristic for the container loading problem: A tertiary-tree-based dynamic space decomposition approach. *European Journal of Operational Research*, v. 191, n. 1, p. 86-99.

Wäscher, G.; Haußner, H.; Schumann, H. (2007). An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 183, n. 3, p. 1109-1130.