

OTIMIZAÇÃO DA RECEITA LÍQUIDA COM PRODUÇÃO AGRÍCOLA POR ÁREA IRRIGADA LIMITADA¹

Angel Ramon Sanchez Delgado^{a*}, Sergio Drumond Ventura^a,
Paulo Cesar Parga Rodrigues^a

^aUniversidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil

Resumo

Na economia agrícola é importante conhecer o comportamento das receitas líquidas com limitações hídricas quando realizamos acréscimos na demanda da produção por área irrigada. O objetivo deste trabalho é conhecer a variação das receitas líquidas quando a produção agrícola por área irrigada (ou produção de alimentos) é maior ou igual que um aumento de 25%, 50% e 75% da produção máxima com limitações hídricas. Tais informações são fundamentais nas tomadas de decisões do produtor agrícola. O problema é modelado matematicamente como um programa não linear com restrições e resolvido através de uma sequência de programas não lineares irrestritos. Depois da caracterização e implantação computacional do modelo, foram desenvolvidos experimentos numéricos usando dados conhecidos na literatura para as culturas: banana, cebola, tomate, melancia, melão e milho. Desses experimentos observou-se que a receita líquida ótima tem queda quando a água total disponível é 50% ou 75% mais que a lâmina máxima de água e a demanda por área irrigada, 25% ou 50% mais que a produção máxima. Pode-se concluir que o procedimento computacional desenvolvido apresenta um bom desempenho numérico para os cenários selecionados.

Palavras-chave: Barreira Logarítmica, Programação Não-linear, Função Resposta, Produção de Alimentos.

Abstract

In the agricultural economy, it is important to know the behavior of net revenues with limited water resources when we perform increases in production demand by irrigated area. The aim of this study is to know the variation of net revenues when the agricultural production per irrigated area (or food production) is greater than or equal to an increase of 25%, 50% and 75% of the maximum production with limited water resources. This information is fundamental for agricultural producers to make decisions. The problem is mathematically modeled as a nonlinear program with constraints and it is solved by a sequence of unconstrained nonlinear programs. After characterizing and implementing the computational model, numerical experiments were carried out using known data in the literature for the following crops: bananas, onions, tomatoes, watermelons, melons and corn. From these experiments, it was observed that the optimal net revenue falls when the total water available is 50% or 75% more than the maximum water depth and the demand per irrigated area, 25% or 50% more than the maximum output. It can be concluded that the computational procedure developed has a good numerical performance for the selected scenarios.

Keywords: Logarithmic Barrier, Non-linear Programming, Response Function, Food Production.

*Autor para correspondência: e-mail: asanchez@ufrj.br

¹Todos os autores assumem a responsabilidade pelo conteúdo do artigo.

1. Introdução

As degradações dos solos, os manejos inadequados da água, fertilizantes e agrotóxicos, têm comprometido a produção agrícola por área irrigada (ou produção de alimentos) compatível com a população presente e futura. Diante este cenário, economicamente se faz importante conhecer o comportamento das receitas líquidas com limitações hídricas quando são realizados acréscimos na demanda da produção por área irrigada. Tais informações são fundamentais para as tomadas de decisões dos pequenos e médios produtores.

Algumas pesquisas revelam (De Lacerda e De Oliveira, 2007; Cavalcante *et al.*, 2011) que para alcançar uma produção crescente, uma alternativa está na produção agrícola em regime de irrigação que tem possibilitado um número maior de safras por ano, principalmente em países do hemisfério sul. Mundialmente a agricultura de sequeiro tem apresentado limitações pela dificuldade de se encontrar solos que não apresentem riscos ambientais e até mesmo pela inexistência de solos aptos (Aquino *et al.*, 2008). Cabe destacar também os riscos associados às recargas pluviométricas irregulares, tanto em seu total quanto em sua distribuição temporal.

Considerando que o comportamento de uma cultura depende da quantidade e frequência de irrigação que são administrados (Frizzone e Andrade Junior, 2005), a função resposta ou de produção (em relação à lâmina de água), representa uma ferramenta básica na modelagem matemática da produção agrícola. Existem diversas publicações que tratam com modelos em que se procura maximizar a produtividade, ou a receita líquida, ou a rentabilidade de uma cultura, sujeitos a restrições de insumos, capital, espaço, entre outros. (Castro *et al.*, 2007; Delgado *et al.*, 2010a; Sousa *et al.*, 2010; Cabral *et al.*, 2011; Ramos *et al.*, 2012; Delgado *et al.*, 2012).

O objetivo deste trabalho é maximizar a receita líquida da produção agrícola com limitações hídricas, no qual a produção por área irrigada de cada cultura considerada (produtividade vezes o quociente entre o volume total de água disponível e lâmina de água) é maior ou igual que certa demanda prefixada. Para isso será utilizada programação não linear. A solução numérica do problema é alcançada utilizando um processo de penalização denominado barreira logarítmica (Izmailov e Solodov, 2012). Nele, a não satisfação (ou o “risco de não-satisfação”) de uma restrição, é penalizada com um acréscimo na função objetivo de maneira que a função que define a restrição é eliminada como tal e substituída por um termo introduzido no objetivo que tende a menos infinito quando o ponto se aproxima da fronteira do conjunto factível. As estratégias de penalização estão vivas na otimização

contemporânea por sua simplicidade e capacidade de se enriquecer automaticamente com progressos realizados na resolução de problemas mais simples.

2. Material e Métodos

Denotemos com $y(w)$ a função resposta ou de produção de uma determinada cultura por volume de água aplicado (w); em geral, uma função não-linear ($kg \cdot ha^{-1}$). Consideramos como receita líquida (R\$ ha^{-1}) a relação dada por: $RL(w) = p_c y(w) - c_w w - c_0$, em que p_c representa o preço da cultura (R\$ kg^{-1}), c_w o custo da lâmina de água (R\$ $(mm \cdot ha)^{-1}$) e c_0 um custo fixo de produção (R\$ ha^{-1}). No trabalho, interessa maximizar $RL(w)$ sujeito a que a produção da cultura por área irrigada seja maior ou igual que certa demanda prefixada com limitações hídricas. Matematicamente se procura a lâmina de água ótima (w) do seguinte problema de programação não linear (PPNL):

$$\text{Maximizar} \quad RL(w) = p_c y(w) - c_w w - c_0 \quad (1)$$

$$\text{Sujeito a :} \quad y_a(w) = y(w) \frac{w_T}{w} \geq d \quad (2)$$

$$w_l \leq w \leq w_u \quad (3)$$

em que:

w – Lâmina de água (mm);

$RL(w)$ – Receita líquida por hectare em função da lâmina de água w (R\$ ha^{-1});

p_c – Preço da cultura considerada (R\$ kg^{-1});

$y(w) = aw^2 + bw + c$ – Função produtividade de uma cultura em relação à lâmina de água w ($kg \cdot ha^{-1}$);

c_w – Custo da lâmina de água (R\$ $(mm \cdot ha)^{-1}$);

c_0 – Custo fixo de produção por hectare (R\$);

$y_a(w)$ – Produção por área irrigada (ou produção de alimento) em relação à lâmina de água w ($kg \cdot ha^{-1}$);

w_T – Água total disponível para irrigar (mm);

d – Demanda prefixada de produção por área irrigada ($kg \cdot ha^{-1}$);

w_l, w_u – Limite inferior e superior da lâmina de água respectivamente (mm).

Note que o problema anterior pode ser escrito como:

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

$$\text{Maximizar } RL(w) = a p_c w^2 + (p_c b - c_w)w + (p_c c - c_0) \quad (4)$$

$$\text{Sujeito a : } g_d(w) = -a w_T w^2 + (d - w_T b)w - w_T c \leq 0 \quad (5)$$

$$w_l \leq w \leq w_u \quad (6)$$

Observe que (4)-(5)-(6), representa uma família de problemas não lineares dependentes da produção prefixada por hectare irrigada (d) e da água total disponível para irrigar (w_T). Por facilidade, suponha que w_T está fixo. Fixando um parâmetro $\mu > 0$ e incorporando as restrições (5) e (6) na função objetivo através de uma barreira logarítmica, resolvemos o seguinte problema de programação não linear sem restrições, utilizando o método do gradiente (Izmailov e Solodov, 2012):

$$\text{Maximizar } \phi_\mu(w) = RL(w) + \mu B(w) \quad (7)$$

Onde $B(w) = \log(-g_d(w)) + \log(w - w_l) + \log(w_u - w)$. Em seguida, o parâmetro μ é diminuído ($\mu = \tau\mu, \tau = 1 \times 10^{-5}$) e o processo repetido até que um critério de parada seja satisfeito. O nome barreira logarítmica deve-se ao fato que a função logaritmo obriga ao procedimento gerar pontos interiores na região de viabilidade. Para cada $\mu > 0$, o máximo de $\phi_\mu(w)$ é alcançado em um ponto interior e quando $\mu \rightarrow 0$ (tende a zero), este se move até um ponto próximo da solução ótima do PPNL. Mais ainda, o conjunto $T_c = \{w = w(\mu): w \text{ resolve (7)}\}$ define uma curva suave denominada trajetória central associada ao PPNL.

Sabe-se que $w = w(\mu)$ é a solução ótima de (7), se e somente se: $\frac{\partial \phi_\mu(w)}{\partial w} = 0$; isto é:

$$\frac{(\gamma w + \delta)}{g_d(w)} + (\alpha w + \beta) + \frac{\mu}{w - w_l} - \frac{\mu}{w_u - w} = 0 \quad (8)$$

em que: $\alpha = 2ap_c$; $\beta = p_c b - c_w$; $\gamma = -2aw_T$; $\delta = d - w_T b$.

Fazendo: $s_u = s_u(w) = \frac{\mu}{w_u - w} > 0$ e $s_l = s_l(w) = \frac{\mu}{w - w_l} > 0$; (8) pode ser escrita como: $(\gamma w + \delta) + g_d(w)(\alpha w + \beta + s_l - s_u) = 0$.

Em resumo, $(w(\mu), s_l(\mu), s_u(\mu))$ é a solução ótima de (8), se e somente se (w, s_l, s_u) resolve o seguinte sistema de equações não lineares:

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

$$(\gamma w + \delta) + g_d(w)(\alpha w + \beta + s_l - s_u) = 0 \quad (9)$$

$$s_l(w - w_l) = \mu \quad (10)$$

$$s_u(w_u - w) = \mu \quad (11)$$

O procedimento computacional para resolver o sistema (9)-(10)-(11) encontra-se no Apêndice, e o critério de parada foi parar quando o resíduo do sistema for menor que 1×10^{-5} ou quando atingimos o número máximo permitido de iterações ($kmax = 100$).

Pode-se dizer que o procedimento para resolver o problema (4)-(5)-(6) funciona como um método de duas fases. Na primeira fase se determina a lâmina de água máxima $w_{max} = Argmax\{y(w): w_l \leq w \leq w_u\}$ (Delgado *et al.*, 2010b) e fazemos $w_T = w_{max}$ ou igual a incrementos escalonados de w_{max} . Aqui $Argmax\{.\}$ denota a variável ou argumento (lâmina de água) no qual se alcança o valor objetivo máximo satisfazendo as restrições impostas. Na segunda fase, escolhemos d (próxima seção) e iterativamente com decrescimentos sucessivos do parâmetro de penalidade $\mu > 0$, geramos uma sequência de soluções aproximadas dos problemas não restritos (7); $w = w(\mu)$, que satisfaz (9)-(10)-(11) e converge à solução ótima do PPNL (De Carvalho *et al.*, 2009).

Para pesquisar o desempenho numérico do procedimento computacional foram selecionados os dados apresentados em Frizzone e Andrade Junior (2005) para as culturas: banana, cebola, tomate e melancia; em Monteiro *et al.* (2007) para a cultura do melão e em Heinemann *et al.* (2001) para a cultura do milho, segundo as informações apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1: Funções respostas das culturas em relação à lâmina de água aplicada (w), preços de cada cultura (P_c) e custos fixos de produção referente a cada cultura (c_0).

y : produtividade ($kg \cdot ha^{-1}$); w : Lâmina de água (mm).

Culturas	Equações	P_c (\$ kg^{-1})	c_0 (\$ ha^{-1})
Banana	$y = -0,01097w^2 + 63,25504w - 36848$	US\$ 0,18	US\$1.200,00
Cebola	$y = -0,2299w^2 + 378,924w - 115910$	US\$ 0,20	US\$ 1.530,00
Tomate	$y = -0,23948w^2 + 271,9355w - 23000$	US\$ 0,08	US\$ 645,00
Melancia	$y = -0,0457w^2 + 81,09w - 2301,15$	US\$ 0,08	US\$ 750,00
Melão	$y = -0,0379w^2 + 54,132w + 5420,3$	R\$ 0,40	R\$ 6.285,00
Milho	$y = -0,1438w^2 + 112,10w - 10472,43$	R\$ 0,171	R\$ 832,77

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

As unidades monetárias apresentadas variam conforme a cada autor. A utilizada por Frizzone e Andrade Junior (2005) foi o dólar (US\$), embora a utilizada por Monteiro *et al.* (2007) e Heinemann *et al.* (2001) foi o real (R\$). Os custos dependentes da água (c_w) também variam com cada autor. Para Frizzone e Andrade Junior (2005) foi de 0,2816 US\$.mm⁻¹; para Monteiro *et al.* (2007) de 0,134 R\$.mm⁻¹ e para Heinemann *et al.* (2001) de 0,15 R\$.mm⁻¹. Esses custos são calculados utilizando a “emaranhada” fórmula da Agência Nacional da Água (ANA). É importante ressaltar que apesar do baixo valor econômico que essa fórmula gera para as administradoras dos recursos hídricos, a fórmula tem-se mantido sem nenhuma modificação; por isso, os custos utilizados no experimento desenvolvido foram mantidos sem nenhuma alteração. Os intervalos de irrigação [w_l, w_u] considerados foram: [1000, 5000] para a banana, [400, 1200] para a cebola, [100, 1000] para o tomate, [0, 1600] para a melancia, [200, 1200] para o melão e [109, 753] para o milho.

3. Resultados e Discussão

Como foi mencionado na seção anterior, o procedimento implantado funciona como um método de duas fases. Os resultados da primeira fase se encontram na Tabela 2 onde é mostrada a lâmina de água, produtividade, receita líquida máxima com limitações hídricas e a chamada lâmina equivalente, denotada por w_e e tal que $RL(w_e) := RL(w_{max})$ (valor da receita líquida na lâmina máxima de água).

Tabela 2: Lâmina de água máxima w_{max} (mm), produtividade máxima y_{max} (kg. ha⁻¹), receita líquida máxima RL_{max} (\$ ha⁻¹) e lâmina equivalente, w_e (mm).
 $w_e: RL(w_e) := RL(w_{max})$ - Lâmina equivalente.

Culturas	w_{max} (mm)	$y_{max} := y(w_{max})$ (kg. ha ⁻¹)	RL_{max} (\$ ha ⁻¹)	w_e (mm)
Banana	2.883	54.337	US\$ 7.768,80	2.740,50
Cebola	824,10	40.227	US\$6.283,30	817,90
Tomate	567,80	54.197	US\$ 2.530,90	553,10
Melancia	887,20	33.670	US\$ 1.693,80	810,10
Melão	714,10	24.749	R\$ 3.507,60	704,30
Milho	389,80	11.375	R\$ 1.002,50	378,30

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

É importante ressaltar que no intervalo $[w_e, w_{max}]$ a irrigação parcial (com déficit), resulta ser mais rentável que a irrigação plena (para a máxima produção). O comprimento desse intervalo pode ser interpretado como uma indicação do grau de segurança no manejo da irrigação parcial (Frizzone e Andrade Junior, 2005; Delgado *et al.*, 2010b). Um comprimento pequeno do intervalo implica maior risco e necessidade de um cuidadoso manejo da irrigação. Dessa forma, conhecido esse intervalo e a incerteza estimada da quantidade ótima de água, a decisão de quanto irrigar pode ser tomado com mais segurança. A Figura 1 mostra um esboço da trajetória central associada à produtividade e receita líquida máxima da banana.

A vantagem de utilizar uma metodologia que segue iterativamente a trajetória central é que ela permite visualizar a convergência à solução ótima quando μ decresce até uma tolerância predeterminada. Mais ainda, a cada iteração é dada ciência do processo das soluções aproximadas geradas e da região onde se encontram.

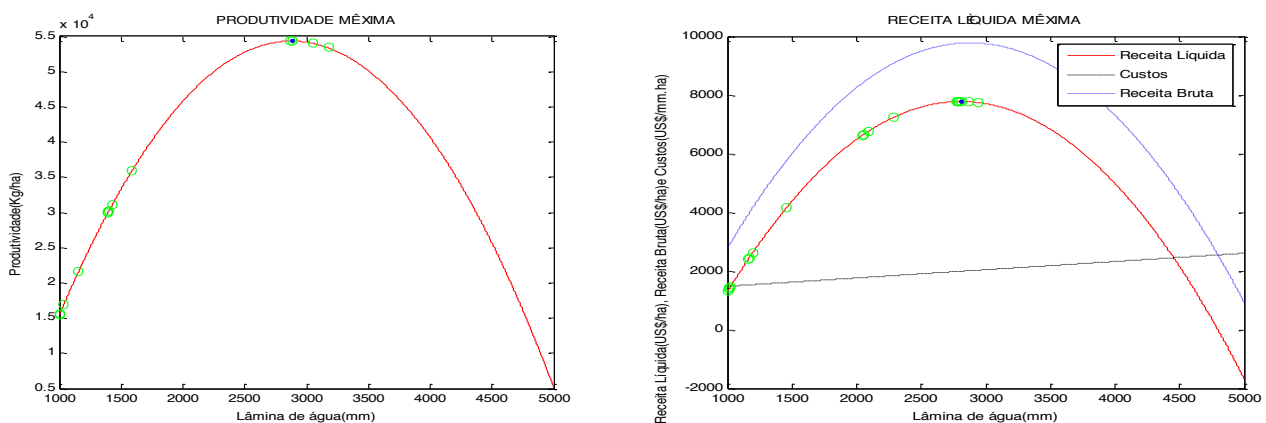


Figura 1 - Curva resposta da produtividade ($kg\ ha^{-1}$) e receita líquida ($\$ \ ha^{-1}$) máxima da banana.

Considerando que a resolução do problema (1)-(2)-(3) depende dos parâmetros externos w_T (água total disponível) e d (demanda prefixada de produção por área irrigada), e que ao final da primeira fase do procedimento se conhece o par (w_{max}, y_{max}) , a decisão foi partir para um experimento numérico que considerasse aumentos escalonados (25%, 50% e 75%) de w_{max} e y_{max} respectivamente.

No ensaio se fez $w_T = w_{max}$ para cada cultura e analisados três cenários: $d = 25\% \uparrow y_{max}$; isto é, escolhemos d , 25% acima do valor de $y_{max} := y(w_{max})$. Seguidamente, $d = 50\% \uparrow y_{max}$ e logo, $d = 75\% \uparrow y_{max}$. Analogamente quando se considera $w_T = 25\% \uparrow w_{max}$, $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$ e $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Na Tabela 3 mostramos os resultados obtidos em relação à banana. Nela é possível observar que os melhores resultados acontecem quando $w_T = w_{max}$ e a demanda da produção por área irrigada (d) é 25%, ou 50%, ou 75% mais que a produção máxima com limitações hídricas ($w_* = 2.812\text{ mm}$ e $RL(w_*) = US\$ 7.768,83$ por hectare). Isto também ocorre quando $w_T = 25\% \uparrow w_{max}$ e $d = 75\% \uparrow y_{max}$. Note que nesses casos se tem 71 mm menos que a lâmina máxima de água (w_{max}) e $US\$ 10,03$ por hectare mais que a receita líquida máxima RL_{max} . Por outra parte na diagonal da Tabela 3 ($w_T = 25\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$; $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$ e $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 75\% \uparrow y_{max}$), os valores obtidos são os mesmos: $w_* = 1.164,94\text{ mm}$ e $RL(w_*) = US\$ 2.423,53$ por hectare, representando 40% da lâmina máxima w_{max} e 32% da receita líquida máxima. No cenário $w_T = 25\% \uparrow w_{max}$ e $d = 50\% \uparrow y_{max}$ se obteve uma lâmina ótima de água $w_* = 1.584,04\text{ mm}$ e uma receita líquida ótima $RL(w_*) = US\$ 4.802,41$ por hectare, representando 55% da lâmina máxima de água e 62% da receita líquida máxima.

Tabela 3: Lâmina de água w_* (mm) e receita líquida $RL(w_*)$ (US\$) ótima para cada variação no volume total de água disponível (w_T) e demanda prefixada (d) (kg ha^{-1}), em relação à lâmina e produção máxima com limitações hídricas (w_{max}, y_{max}) da banana.

Banana	$d = 25\% \uparrow y_{max}$	$d = 50\% \uparrow y_{max}$	$d = 75\% \uparrow y_{max}$
$w_T = w_{max}$	$w_* = 2.812,25$ $RL(w_*) = 7.778,83$	$w_* = 2.812,05$ $RL(w_*) = 7.778,83$	$w_* = 2.811,99$ $RL(w_*) = 7.778,83$
$w_T = 25\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 1.164,94$ $RL(w_*) = 2.423,53$	$w_* = 1.584,04$ $RL(w_*) = 4.802,41$	$w_* = 2.812,10$ $RL(w_*) = 7.778,83$
$w_T = 50\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 1.010,42$ $RL(w_*) = 1.371,38$	$w_* = 1.164,94$ $RL(w_*) = 2.423,53$	$w_* = 1.457,94$ $RL(w_*) = 4.159,59$
$w_T = 75\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 930,85$ $RL(w_*) = 792,82$	$w_* = 1.028,75$ $RL(w_*) = 1.501,17$	$w_* = 1.164,94$ $RL(w_*) = 2.423,53$

Um resultado similar foi obtido no cenário $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$ e $d = 75\% \uparrow y_{max}$, onde tivemos $w_* = 1.584,04\text{ mm}$ e $RL(w_*) = US\$ 4.802,41$ por hectare; isto é, 50% da lâmina máxima de água e 53.8% da receita líquida máxima. Já no cenário $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$ e $d = 25\% \uparrow y_{max}$, teve-se 35% da lâmina máxima de água (1.010,42 mm) e 17% da receita líquida máxima por hectare (US\$ 1.371,38). No cenário $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow$

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

y_{max} , foram 33% da lâmina máxima de água (930,85 mm) e 10,25% da receita líquida máxima por hectare (US\$ 792,82). Finalmente no cenário $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$, se alcançou 35,5% da lâmina máxima de água (1.028,75 mm) e 19,75% da receita líquida máxima por hectare (US\$ 1.501,17).

Na Tabela 4 encontram-se os resultados obtidos em relação à cebola. Os melhores resultados podem ser observados quando $w_T = w_{max}$ e a demanda da produção por área irrigada (d) é 25%, ou 50%, ou 75% mais que a produção máxima com limitações hídricas ($w_* = 821$ mm e $RL(w_*) = US\$ 6.283,72$ por hectare). Tais resultados também podem ser observados nos cenários: $w_T = 25\% \uparrow w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$, $w_T = 25\% \uparrow w_{max}$, $d = 75\% \uparrow y_{max}$ e $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$, $d = 75\% \uparrow y_{max}$. Na diagonal da tabela os valores obtidos são os mesmos: $w_* = 826,22$ mm e $RL(w_*) = US\$ 6.282,49$ por hectare. A diferença da cultura banana, esses valores são muito próximos aos valores da lâmina e receita líquida máxima.

Tabela 4: Lâmina de água w_* (mm) e receita líquida $RL(w_*)$ (US\$) ótima para cada variação no volume total de água disponível (w_T) e demanda prefixada (d) ($kg\ ha^{-1}$), em relação à lâmina e produção máxima com limitações hídricas (w_{max}, y_{max}) da cebola.

Cebola	$d = 25\% \uparrow y_{max}$	$d = 50\% \uparrow y_{max}$	$d = 75\% \uparrow y_{max}$
$w_T = w_{max}$	$w_* = 821,11$ $RL(w_*) = 6.283,72$	$w_* = 821,08$ $RL(w_*) = 6.283,72$	$w_* = 821,07$ $RL(w_*) = 6.283,72$
$w_T = 25\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 826,22$ $RL(w_*) = 6.282,49$	$w_* = 821,12$ $RL(w_*) = 6.283,72$	$w_* = 821,09$ $RL(w_*) = 6.283,72$
$w_T = 50\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 928,06$ $RL(w_*) = 5.757,13$	$w_* = 826,22$ $RL(w_*) = 6.282,49$	$w_* = 821,14$ $RL(w_*) = 6.283,72$
$w_T = 75\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 984,44$ $RL(w_*) = 5.056,15$	$w_* = 915,64$ $RL(w_*) = 5.872,28$	$w_* = 826,22$ $RL(w_*) = 6.282,49$

Já no cenário $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$, a lâmina ótima w_* foi 103,96 mm mais que a lâmina máxima e US\$ 526,17 por hectare menos que a receita líquida máxima; no cenário $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$, a lâmina ótima w_* apresentou 160,34 mm mais que a lâmina máxima e US\$ 1.227,15 por hectare menos que a receita líquida máxima. Finalmente no cenário $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$, a lâmina ótima w_* alcançou 91,54 mm mais que a lâmina máxima e US\$ 411,02 por hectare menos que a receita

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

líquida máxima. Desta maneira que estes três últimos cenários não resultam recomendáveis na otimização da receita líquida.

Na Tabela 5 são mostrados os resultados em relação à cultura do tomate. Os melhores resultados se encontram em: $w_T = w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$, $w_T = w_{max}$, $d = 75\% \uparrow y_{max}$ e $w_T = 25\% \uparrow w_{max}$, $d = 75\% \uparrow y_{max}$, com uma receita líquida igual a US\$ 2.531,94 por hectare. Em $w_T = w_{max}$ e $d = 25\% \uparrow y_{max}$ a lâmina ótima foi de 244,42 mm, representando 44% da lâmina máxima e uma receita líquida ótima de US\$ 618,95 por hectare, o que representa 24% da receita líquida máxima. Também em $w_T = 25\% \uparrow w_{max}$ e $d = 50\% \uparrow y_{max}$, a lâmina ótima foi de 219,23 mm (39% da lâmina máxima) com uma receita líquida de US\$ 301,83 por hectare; isto é, 12% da receita líquida máxima. Finalmente a diagonal da tabela e os cenários $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$, $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$ e $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$ são considerados não recomendáveis em vista de ter receitas líquidas negativas.

Tabela 5: Lâmina de água w_* (mm) e receita líquida $RL(w_*)$ (US\$) ótima para cada variação no volume total de água disponível (w_T) e demanda prefixada (d) ($kg\ ha^{-1}$), em relação à lâmina e produção máxima com limitações hídricas (w_{max} , y_{max}) do tomate.

Tomate	$d = 25\% \uparrow y_{max}$	$d = 50\% \uparrow y_{max}$	$d = 75\% \uparrow y_{max}$
$w_T = w_{max}$	$w_* = 244,42$ $RL(w_*) = 618,95$	$w_* = 560,55$ $RL(w_*) = 2.531,94$	$w_* = 560,52$ $RL(w_*) = 2.531,94$
$w_T = 25\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 169,08$ $RL(w_*) = -402,03$	$w_* = 219,23$ $RL(w_*) = 301,85$	$w_* = 560,58$ $RL(w_*) = 2.531,94$
$w_T = 50\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 146,06$ $RL(w_*) = -757,30$	$w_* = 169,08$ $RL(w_*) = -402,03$	$w_* = 207,29$ $RL(w_*) = 142,94$
$w_T = 75\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 133,92$ $RL(w_*) = -952,97$	$w_* = 148,84$ $RL(w_*) = -713,32$	$w_* = 169,08$ $RL(w_*) = -402,03$

Na Tabela 6 encontramos os resultados em relação à melancia. É possível observar bons resultados quando $w_T = w_{max}$ e a demanda da produção por área irrigada (d) é 25%, ou 50%, ou 75% mais que a produção máxima com limitações hídricas (R\$ 1.699,21 por hectare). Esta mesma receita líquida apresenta-se nos cenários: $w_T = 25\% \uparrow w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$, $w_T = 25\% \uparrow w_{max}$, $d = 75\% \uparrow y_{max}$ e $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$, $d = 75\% \uparrow y_{max}$.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

y_{max} . Na diagonal da tabela temos uma lâmina ótima de 890,49 mm e uma receita líquida de R\$ 1.692,82 por hectare. No cenário $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$, observa-se uma alta de 147,19 mm em relação à lâmina máxima e uma queda de R\$ 120,67 por hectare em relação à receita líquida máxima. Já no cenário $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$ foi uma alta de 250,22 mm em relação à lâmina máxima e uma queda de R\$ 299,22 em relação à receita líquida máxima. Finalmente no cenário $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$, a alta foi de 126,51 mm e a queda de R\$ 94,15.

Tabela 6: Lâmina de água w_* (mm) e receita líquida $RL(w_*)$ (US\$) ótima para cada variação no volume total de água disponível (w_T) e demanda prefixada (d) ($kg\ ha^{-1}$), em relação à lâmina e produção máxima com limitações hídricas (w_{max} , y_{max}) da melancia.

Melancia	$d = 25\% \uparrow y_{max}$	$d = 50\% \uparrow y_{max}$	$d = 75\% \uparrow y_{max}$
$w_T = w_{max}$	$w_* = 849,59$ $RL(w_*) = 1.699,21$	$w_* = 849,18$ $RL(w_*) = 1.699,21$	$w_* = 849,06$ $RL(w_*) = 1.699,21$
$w_T = 25\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 890,49$ $RL(w_*) = 1.692,82$	$w_* = 849,82$ $RL(w_*) = 1.699,21$	$w_* = 849,28$ $RL(w_*) = 1.699,21$
$w_T = 50\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 1.034,39$ $RL(w_*) = 1.573,13$	$w_* = 890,49$ $RL(w_*) = 1.692,82$	$w_* = 850,07$ $RL(w_*) = 1.699,21$
$w_T = 75\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 1.137,42$ $RL(w_*) = 1.394,43$	$w_* = 1.013,71$ $RL(w_*) = 1.599,65$	$w_* = 890,49$ $RL(w_*) = 1.692,82$

Na Tabela 7 se mostram os resultados obtidos para a cultura do melão. Pode-se observar que nos cenários: $w_T = w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$; $w_T = w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$; $w_T = w_{max}$, $d = 75\% \uparrow y_{max}$; $w_T = 25\% \uparrow w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$; $w_T = 25\% \uparrow w_{max}$, $d = 75\% \uparrow y_{max}$ e $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$, $d = 75\% \uparrow y_{max}$ se obtém a melhor receita líquida igual a R\$ 3.519,31 por hectare. Na diagonal da tabela os valores da lâmina e receita líquida ótima são praticamente os mesmos da lâmina e receita líquida máxima. No cenário $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$, temos uma lâmina ótima com 123,25 mm mais que a lâmina máxima e uma receita líquida ótima com R\$ 235,23 menos que a receita líquida máxima. Por outra parte, no cenário $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$, a lâmina ótima alcança 215,1 mm mais que a lâmina máxima e a receita líquida ótima, R\$ 718,52 menos que a receita líquida máxima. Finalmente no cenário $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$, a lâmina ótima tem 105,28 mm mais que a lâmina máxima e a receita líquida ótima R\$ 170,58

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

menos que a receita líquida máxima. Desta maneira que os três últimos cenários são não recomendáveis na otimização da receita líquida.

Tabela 7: Lâmina de água w_* (mm) e receita líquida $RL(w_*)$ (R\$) ótima para cada variação no volume total de água disponível (w_T) e demanda prefixada (d) ($kg\ ha^{-1}$), em relação à lâmina e produção máxima com limitações hídricas (w_{max}, y_{max}) do melão.

Melão	$d = 25\% \uparrow y_{max}$	$d = 50\% \uparrow y_{max}$	$d = 75\% \uparrow y_{max}$
$w_T = w_{max}$	$w_* = 709,96$ $RL(w_*) = 3.519,31$	$w_* = 709,86$ $RL(w_*) = 3.519,31$	$w_* = 709,83$ $RL(w_*) = 3.519,31$
$w_T = 25\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 718,07$ $RL(w_*) = 3.518,26$	$w_* = 710,01$ $RL(w_*) = 3.519,31$	$w_* = 709,89$ $RL(w_*) = 3.519,31$
$w_T = 50\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 837,35$ $RL(w_*) = 3.272,37$	$w_* = 718,07$ $RL(w_*) = 3.518,26$	$w_* = 710,06$ $RL(w_*) = 3.519,31$
$w_T = 75\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 929,20$ $RL(w_*) = 2.789,08$	$w_* = 819,38$ $RL(w_*) = 3.337,02$	$w_* = 718,07$ $RL(w_*) = 3.518,26$

Por último a Tabela 8 mostra os resultados obtidos para a cultura do milho.

Tabela 8: Lâmina de água w_* (mm) e receita líquida $RL(w_*)$ (R\$) ótima para cada variação no volume total de água disponível (w_T) e demanda prefixada (d) ($kg\ ha^{-1}$), em relação à lâmina e produção máxima com limitações hídricas (w_{max}, y_{max}) do milho.

Milho	$d = 25\% \uparrow y_{max}$	$d = 50\% \uparrow y_{max}$	$d = 75\% \uparrow y_{max}$
$w_T = w_{max}$	$w_* = 386,992$ $RL(w_*) = 1.054,047$	$w_* = 386,884$ $RL(w_*) = 1.054,048$	$w_* = 386,849$ $RL(w_*) = 1.054,048$
$w_T = 25\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 186,735$ $RL(w_*) = 70,530$	$w_* = 387,047$ $RL(w_*) = 1.054,046$	$w_* = 386,911$ $RL(w_*) = 1.054,047$
$w_T = 50\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 448,153$ $RL(w_*) = 961,270$	$w_* = 186,735$ $RL(w_*) = 70,530$	$w_* = 242,418$ $RL(w_*) = 541,958$
$w_T = 75\% \uparrow w_{max}$	$w_* = 150,320$ $RL(w_*) = -320,233$	$w_* = 440,537$ $RL(w_*) = 982,850$	$w_* = 186,735$ $RL(w_*) = 70,530$

Novamente os cenários: $w_T = w_{max}, d = 25\% \uparrow y_{max}$; $w_T = w_{max}, d = 50\% \uparrow y_{max}$; $w_T = w_{max}, d = 75\% \uparrow y_{max}$; $w_T = 25\% \uparrow w_{max}, d = 50\% \uparrow y_{max}$; $w_T = 25\% \uparrow w_{max}, d = 75\% \uparrow y_{max}$; $w_T = 50\% \uparrow w_{max}, d = 25\% \uparrow y_{max}$; $w_T = 50\% \uparrow w_{max}, d = 50\% \uparrow y_{max}$; $w_T = 50\% \uparrow w_{max}, d = 75\% \uparrow y_{max}$; $w_T = 75\% \uparrow w_{max}, d = 25\% \uparrow y_{max}$; $w_T = 75\% \uparrow w_{max}, d = 50\% \uparrow y_{max}$; $w_T = 75\% \uparrow w_{max}, d = 75\% \uparrow y_{max}$.

w_{max} , $d = 75\% \uparrow y_{max}$, mostram a melhor receita líquida ótima (R\$ 1.054,47 por hectare). Já no cenário $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$, $d = 75\% \uparrow y_{max}$; apesar de se ter uma queda de 147, 382 mm em relação à lâmina máxima, também se tem uma quantidade R\$ 460, 542 em relação à receita líquida máxima. Na diagonal da tabela pode se observar uma baixa significativa na lâmina ótima de 203, 065 mm em relação à lâmina máxima, mas também uma baixa significativa de R\$ 931, 97 em relação à receita líquida máxima. Nos cenários $w_T = 50\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$ e $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 50\% \uparrow y_{max}$, se tem um pequeno acréscimo na lâmina ótima e uma pequena queda na receita líquida ótima. Finalmente o cenário $w_T = 75\% \uparrow w_{max}$, $d = 25\% \uparrow y_{max}$ apresenta uma receita líquida ótima negativa e assim resulta não recomendável.

4. Conclusões

Dos ensaios numéricos realizados foi possível constatar que a receita líquida ótima tem queda quando o total de água disponível é 50% ou 75% mais que a lâmina máxima de água (w_{max}) e a demanda por área irrigada (d), 25% ou 50% mais que a produção máxima. Esses resultados indicam que não é recomendável aumentar o total de água disponível em 50% se só desejamos aumentar em 25% a produção máxima (y_{max}) ou em 75% se só desejamos aumentar em 50% a produção máxima. Pode-se concluir que a metodologia desenvolvida, apresenta um bom comportamento numérico para os cenários escolhidos são comparados resultados obtidos com os apresentados em Frizzone e Andrade Junior (2005); Monteiro *et al.* (2007) e Heinemann *et al.* (2001); mas serão necessárias novas experiências numéricas que permitam garantir a confiabilidade plena do modelo e do procedimento computacional apresentado. Em trabalho futuro parece interessante examinar o desempenho numérico da metodologia apresentada, quando são realizadas reduções escalonadas da lâmina máxima de água.

Referências

- Aquino, D. do N.; Andrade, E. M. de; Lopes, F. B.; Teixeira, A. dos S.; Crisostomo, L. de A. (2008). Impacto do manejo da irrigação sobre os recursos solo e água. *Revista Ciência Agronômica*, v. 39, n. 2, p. 225-232.
- Cabral, W. S.; Curi, R. C.; Curi, W. F.; Alencar, V. C. (2011). Análise das variações na receita líquida otimizada de uma área irrigada sujeita a manejo convencional e ecológico. *Revista Brasileira de Agroecologia*, v. 6, n. 2, p. 30-39.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Castro, R. P.; Costa, R. N. T.; Silva, L. A. C.; Gomes Filho, R. R. (2007). Modelos de precisão para otimização econômica do uso da água em áreas irrigadas da fazenda experimental do vale do Curu, Pentecoste, CE. *Revista Irriga*, v. 12, n. 3, p. 377-392.

Cavalcante, J. A. C.; Delgado, A. R. S.; Medeiro, J. A. C.; Carvalho D. (2011). Usos de recursos na dose certa: Uma ferramenta computacional para otimização agrícola. *Revista Sistemas & Gestão*, v. 4, n. 6, p. 398-413.

De Carvalho, D. F.; Delgado, A. R. S.; De Oliveira, R. F.; Da Silva, W. A.; Do Forte, V. L. (2009). Maximização da produção e da receita agrícola com limitações de água e nitrogênio utilizando método de pontos interiores. *Engenharia Agrícola*, v. 29, n. 2, p. 321-327.

De Lacerda, N. B.; De Oliveira, T. S. (2007). Agricultura irrigada e a qualidade de vida dos agricultores em perímetros do Estado do Ceará, Brasil. *Revista Ciência Agronômica*, v. 38, n. 2, p. 216-223.

Delgado, A. R. S.; Da Silva, W. A.; De Carvalho, D. F.; Do Forte, V. L. (2012). Planejamento da agricultura irrigada no norte fluminense, utilizando diferentes técnicas de programação matemática. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 4, n. 3, p. 249-256.

Delgado, A. R. S.; Duarte, W. S.; Lima, V. N.; De Carvalho, D. F. (2010a) Modelagem matemática para otimização e renda de melão e melancia em função de lâminas de água e doses de nitrogênio. *Irriga*, v. 15, n. 1, p. 1-9.

Delgado, A. R. S.; Ventura, S. D.; De Carvalho, D. F.; Dos Santos, R. D. (2010b). Determinação de intervalos ótimos de irrigação utilizando a barreira logarítmica. *Revista Brasileira de Agricultura Irrigada*, v. 4, n. 2, p. 128-138.

Frizzone, J. A.; Andrade Junior, A. S. de (Eds.). (2005). Planejamento de Irrigação: Análise de decisão de investimento. 1ª Ed. Brasília, DF: Embrapa Informação Tecnológica. 626p.

Heinemann, A. B.; Sousa, S. A. V.; Frizzone, J. A. (2001). Determinação da lâmina ótima de água para cultura do milho doce na região de Sete Lagoas, MG. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, v. 5, n. 1, p. 147-151.

Izmailov, A.; Solodov, M. (2012). Otimização. Métodos computacionais. 2ª Ed., Rio de Janeiro: IMPA. 448p.

Monteiro, R. O. C.; Távora N. R.; Leão S. C.; De Aguiar V. J. (2007) Aspectos econômicos da produção de melão submetidos a diferentes lâminas de irrigação e doses de nitrogênio. *Irriga*, v. 12, n. 3, p. 364-376.

Ramos, H. M. M.; Bastos, E. A.; Andrade Junior, A. S. de; Marouelli, W. A. (2012). Estratégias ótimas de irrigação do feijão-caupi para produção de grãos verdes. *Pesquisa Agropecuária Brasileira*, v. 47, n. 4, p. 576-583.

Sousa, A. E. C.; Bezerra, F. M. L.; De Souza, C. H. C.; Dos Santos, F. S. S. (2010). Produtividade do meloeiro sob lâmina de irrigação e adubação potássica. *Engenharia Agrícola*, v. 30, n. 2, p. 271-278.

APÊNDICE

```

functiontesta_cenarios ( cultura, cenarios )
    mu= 10;
    epsilon= 1e-5;
    tau= 1e-5;
    kmax= 100;
    disp( cultura )
    [a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt]= dados( cultura );
    res= faztestes( cenarios, a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt,mu,epsilon,tau,kmax );
    out= res;
    wt25= 1.25*wt;
    res= faztestes( cenarios,a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt25,mu,epsilon,tau,kmax );
    out= [out; res];
    wt50= 1.5*wt;
    res= faztestes( cenarios,a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt50,mu,epsilon,tau,kmax );
    out= [out; res];
    wt75= 1.75*wt;
    res= faztestes( cenarios,a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt75,mu,epsilon,tau,kmax );
    out= [out; res];
    out
    ##plota(a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt,d)
endfunction
## *****
functionresposta= faztestes( cenarios,a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt, \mu,epsilon,tau,kmax)
d= cenarios(1);
[w1, r1, k1]= procedimento( a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt,d, \ mu,epsilon,tau,kmax );
d= cenarios(2);
[w2, r2, k2]= procedimento( a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt,d, \ mu,epsilon,tau,kmax );
d= cenarios(3);
[w3, r3, k3]= procedimento( a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt,d, \ mu,epsilon,tau,kmax );
resposta= [w1 w2 w3; r1 r2 r3];
endfunction
## *****

```

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

```

function [w, r, k]= procedimento( a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt,d, \ mu0,epsilon,tau,kmax )
w0= (wl+wu)/2;
sl0= mu0/(w0-wl);
su0= mu0/ (wu-w0);
alfa= 2*a*pc;
    beta= pc*b - cw;
    gama= -2*a*wt;
    delta= d - wt*b;
w= w0; sl= sl0; su= su0; mu= mu0;
[rho, f1, f2]= critetio_parada( w, delta, gama, a, wt, d, b, c, sl, \ su, alfa, beta, mu, wl, wu );
k= 0;
while max( [abs(rho) abs(f1) abs(f2)] ) > epsilon && k<kmax
gw= funcaog( w, a, wt, d, b, c );
hw= delta + gama*w;
    teta= alfa*gw + hw*( sl - su + alfa*w + beta ) + gama;
    M= [teta gw -gw; sl (w-wl) 0; -su 0 (wu-wl)];
rhs= [rho; f1; f2];
    Delta= M\rhs;
lambda= min( [abs(w/Delta(1)) abs(sl/Delta(2)) abs(su/Delta(3))] );
w= w + 0.999*lambda*Delta(1);
sl= sl + 0.999*lambda*Delta(2);
su= su + 0.999*lambda*Delta(3);
mu= tau*mu;
[rho, f1, f2]= critetio_parada( w, delta, gama, a, wt, d, b, c, sl, \su, alfa, beta, mu, wl, wu );
k= k+1;
endwhile
r = receita( w, a, pc, b, cw, c, c0 );
endfunction
## *****
function [rho, f1, f2]= critetio parada( w, delta, gama, a, wt, d, b,c, sl,\su, alfa, beta, mu, wl,
wu)
gw= funcaog( w, a, wt, d, b, c );
rho= -delta - gama*w - gw*(sl - su + alfa*w + beta);

```


PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

```
f1= mu - sl*( w - wl );
f2= mu - su*( wu - w );
endfunction
## *****
functiongw= funcaog( w, a, wt, d, b, c )
gw= -a*wt*w^2 + (d-wt*b)*w - wt*c;
endfunction
## *****
functionhw= funcaoh( w, delta, gamma )
hw= delta + gama*w;
endfunction
## *****
function r = receita( w, a, pc, b, cw, c, c0 )
r= a*pc*w^2 + (pc*b - cw)*w + (pc*c - c0);
endfunction
## *****
functionplota(a,b,c,pc,c0,cw,wl,wu,wt,d)
w= linspace(wl,wu,1000);
r= -a*wt*w.^2 + (d-wt*b)*w - wt*c;
f= a*pc*w.^2 + (pc*b - cw)*w + (pc*c - c0);
subplot(1,2,1)
plot(w,r,'b')
subplot(1,2,2)
plot(w,f,'r')
endfunction
```