SOBRAPO

PODes
Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento

Rio de Janeiro, v.7, n.1, p. 82-104, janeiro a abril de 2015

# MODELOS MATEMÁTICOS PARA O PROBLEMA INTEGRADO DE DIMENSIONAMENTO DE LOTES E CORTE DE ESTOQUE UNIDIMENSIONAL

Aneliza Leandro Longhi[a], Gislaine Mara Melega[a], Silvio Alexandre de Araujo[a*]

[a]*Universidade Estadual Paulista - UNESP, São José do Rio Preto-SP, Brasil*

## Resumo

Os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque unidimensional são importantes em diversos setores industriais, tais como, fábricas de móveis tubulares e de papel, metalúrgicas, entre outros e, geralmente, estes problemas são tratados de maneira independente. Neste trabalho, abordamos os dois problemas de maneira integrada. Consideramos um modelo clássico para o problema de dimensionamento de lotes, bem como sua reformulação baseada no problema de caminho mínimo. Para o problema de corte de estoque unidimensional, foram estendidos três diferentes modelos encontrados na literatura de forma a considerar vários períodos de tempo. A partir destes modelos, foram propostas formulações que tratam os problemas de maneira integrada. Um estudo computacional foi realizado utilizando dados gerados aleatoriamente, com o objetivo de avaliar a qualidade dos modelos integrados em diferentes aspectos.

Palavras-Chave: Problemas de dimensionamento de lotes, Problemas de corte de estoque unidimensional, Problemas integrados.

## Abstract

The lot-sizing and the one-dimensional cutting-stock problems play an important role in several production sectors, such as, tubular furniture factories, paper plants, and metallurgical industries. These problems are generally dealt independently. In this work, we approached both problems in an integrated way. We considered a classical model for lot sizing problem and its reformulation based on the shortest path problem. Concerning the one-dimensional cutting stock problem, we extend three different models from literature considering multiple periods. Based on the models studied, we proposed formulations that treat the problems in an integrated way. A computational study was performed using randomly generated data. The aim of this study was to assess the quality of integrated models in different aspects.

Keywords: Lot-sizing problems, One-dimensional cutting stock problems, Integrated problems.

***Autor para correspondência:** e-mail: saraujo@ibilce.unesp.br

Versão inicial submetida em 19/05/2014. Versão final recebida em 21/10/2014.

## 1 Introdução

Com o avanço tecnológico e a crescente concorrência pelo mercado, as indústrias precisam de processos produtivos cada vez mais eficientes que atendam a demanda e minimizem os custos. Para que isso aconteça, modelos matemáticos que retratam esses processos têm sido estudados e aplicados nas empresas.

Um problema de otimização bastante estudado e aplicado em indústrias é o problema de corte de estoque, que consiste basicamente em determinar a melhor forma de cortar peças maiores em estoque, que chamamos de objetos, em peças menores de diferentes tamanhos, isto é, itens, de forma a atender a demanda destes itens. Outro problema bastante estudado é o problema de dimensionamento de lotes, que busca determinar com custo mínimo, o tamanho dos lotes de produção de forma a atender a demanda de cada produto final ao longo de um horizonte de planejamento finito.

Em alguns processos industriais estes dois problemas podem interagir entre si. Quando, em determinado período de tempo, os objetos são cortados em itens menores, existe, frequentemente, perda de material. Porém, se a quantidade de itens a ser cortada cresce neste período, este desperdício pode se tornar menor, devido a melhores possibilidades de combinações dos itens nos objetos. A fim de diminuir os custos de produção e o desperdício de material, pode-se buscar antecipar a produção de alguns itens, que necessitariam ser estocados para entrega posterior, o que gera custo de estocagem. Existem também, custos de preparação de máquinas a cada período em que houver produção. Por isso, uma dúvida sobre adiantar ou não a produção se faz presente. Essa questão nos motiva a combinar os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque.

De acordo com Gramani e França (2006), alguns processos de produção consistem em três estágios. O primeiro recebe os pedidos demandados, analisa a quantidade de cada tipo de produto final e a data de entrega. O segundo estágio converte esta demanda de produtos finais em demanda de itens. E, no terceiro estágio, resolve-se o problema de dimensionamento de lotes combinado ao corte de estoque, ou seja, decide-se quanto produzir de cada item em cada período do horizonte de planejamento, minimizando os custos associados com estoque de itens, preparação de máquinas e desperdício de matéria prima. O estudo realizado neste trabalho encontra-se no terceiro estágio, isto é, não será considerado a composição dos itens em produtos finais (Poldi e Arenales (2010), Gramani e França (2006), Poltronieri *et al.* (2008)). Além disso, consideramos o caso em que o problema de corte é unidimensional.

Este trabalho estende o trabalho de Longhi (2013) e tem como objetivo combinar modelos clássicos de dimensionamento de lotes e corte de estoque a fim de avaliar a qualidade das diferentes combinações quando resolvidas por um pacote computacional. Com isso, pretende-se auxiliar pesquisas futuras relacionadas à integração de problemas que podem envolver modelos mais complexos, baseados em casos práticos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, são descritos os problemas de dimensionamento de lotes e de corte de estoque, que serão abordados. Na Seção 3, uma revisão bibliográfica sobre os problemas integrados é apresentada. Os modelos integrados propostos neste trabalho são detalhados na Seção 4. Na Seção 5 são apresentados os resultados computacionais, bem como, uma análise realizada através dos resultados obtidos. Finalmente, na Seção 6, conclusões e considerações para trabalhos futuros são apresentadas.

## 2 Problema de dimensionamento de lotes e o problema de corte de estoque

O problema de dimensionamento de lotes soluciona a questão de quantos itens produzir, em uma ou várias máquinas, em cada período do horizonte de planejamento. Estes itens irão compor os produtos finais, de modo a atender a demanda e minimizar certa função objetivo, por exemplo, a soma dos custos de produção, estocagem e preparação. Pode-se acrescentar restrições ao modelo, tais como, restrições de limitação da capacidade (Karimi *et al.* (2003) e Brahimi *et al.* (2006)).

Um modelo bastante conhecido para problemas de dimensionamento de lotes e abordado neste trabalho, foi proposto por Wagner e Whitin (1958) para resolver um problema monoestágio, sem restrição de capacidade, com custo de preparação e um único item. Considera-se um horizonte de planejamento finito dividido em vários períodos discretos com demanda determinística e dinâmica, ou seja, a demanda é conhecida e pode variar ao longo do horizonte de planejamento. Neste trabalho, este modelo será referido como WW.

Uma reformulação para este problema foi proposta por Eppen e Martin (1987) que se basearam na propriedade de otimalidade proposta em Wagner e Whitin (1958). Os autores utilizaram a estratégia de redefinição de variáveis, para apresentar uma reformulação como um problema de caminho mínimo, para o problema de dimensionamento de lotes sem restrição de capacidade. Tal reformulação será chamada, neste trabalho, por EM. A ideia desta reformulação foi originalmente proposta para problemas sem restrição de capacidade e Jans e Degraeve (2004), Jans (2009), Fiorotto e Araujo (2012, 2014) e Melega *et al.* (2013) estenderam para os casos com restrição de capacidade, máquinas paralelas relacionadas, máquinas paralelas não relacionadas e várias plantas, respectivamente. Ainda, Bernardes *et al.* (2010) e Araujo e Clark (2013) consideraram uma reformulação aplicada ao problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes.

Os problemas de corte têm sido estudados há muitos anos, porém os trabalhos mais repercutidos sobre este assunto foram os trabalhos de Gilmore e Gomory (1961, 1963). Quando resolve-se um problema de corte de estoque, determina-se a melhor maneira de utilizar objetos para cortar itens menores, de dimensões bem especificadas e que fazem parte de uma demanda. A função objetivo a ser otimizada pode representar vários aspectos como, por exemplo, a minimização da perda de material ou ainda o número total de objetos utilizados. Trata-se de um problema importante, presente constantemente em ambientes industriais, e interessante devido à sua complexidade computacional.

Em processos industriais os objetos podem ser barras de aço, bobinas de papel, de tecido, de alumínio, chapas de metal, de madeira, entre outros. Os problemas de corte também podem ser considerados nas alocações de materiais em contêineres de navios, nas carrocerias de caminhões e vagões de trens. Nestes casos, os problemas são chamados de problemas de empacotamento.

Neste trabalho será considerado o problema de corte de estoque unidimensional com um único tipo de objeto em estoque e em quantidade suficiente para atender a demanda. Para este problema, considera-se o modelo atribuído por Valério de Carvalho (1999, 2002) à Kantorovich (1960), o qual será denotado por modelo KT, assim como o modelo proposto em Valério de Carvalho (1999, 2002), que será chamado ao longo do texto por modelo VC. Observa-se que o modelo KT não aparece explicitamente no artigo Kantorovich (1960) e que este modelo também poderia ter sido chamado de modelo de designação ou de *bin packing*.

O modelo KT consiste em determinar a melhor maneira de cortar os objetos de modo a atender a demanda e minimizar a quantidade de objetos utilizados. As desvantagens deste modelo é a necessidade de conhecer *à priori* um limitante superior para a quantidade de objetos necessários e a má qualidade do limitante inferior produzido pela relaxação linear.

Já o modelo VC fornece limitantes inferiores de melhor qualidade e é baseado no problema de fluxo em arcos. Determinar um padrão de corte válido (maneira de cortar o objeto maior em itens menores) consiste em encontrar um caminho em um grafo acíclico e orientado $G=(V,A)$, com $V=\{0,1,..., W\}$, onde $W$ é o comprimento do objeto. O conjunto de arcos $A$ é definido da seguinte forma: existe um arco entre dois vértices se, e somente se, a distância entre eles é igual ao comprimento de algum item. Além desses arcos, existem os arcos de perda ($j$,

$j$+1), $j=0,1,...,W-1$. Quando se têm restrições de atendimento da demanda, o modelo resultante resolve o problema de corte de estoque.

No entanto, o modelo VC apresenta muitas soluções simétricas, ou seja, soluções alternativas que correspondem aos mesmos padrões de corte. Por este motivo, Valério de Carvalho (1999, 2002) apresentou alguns critérios que permitem eliminar alguns arcos, reduzindo o número de soluções simétricas, sem que nenhum padrão de corte válido seja eliminado e diminuindo consideravelmente a quantidade de padrões de corte (colunas do problema).

O primeiro critério consiste em alocar os itens por ordem decrescente de comprimento em cada padrão de corte, ou seja, um item de comprimento $i_1$ pode ser colocado somente após outro item de comprimento $i_2$ se $w_{i1} \leq w_{i2}$, ou no início do objeto.

Outro critério utilizado para reduzir soluções simétricas consiste no fato de não iniciar um padrão de corte com perdas. Assim, o primeiro arco de perda será inserido no grafo a uma distância do início do objeto que representa o item demandado de menor comprimento.

Outros critérios de redução foram propostos em Valério de Carvalho (1999, 2002), mas não foram utilizados neste trabalho. Isto se deve ao fato de que em Valério de Carvalho (1999, 2002), os autores consideram o problema com um único período de produção e, limitam a produção dos itens em excesso de acordo com a demanda a partir de critérios de redução. Nos modelos propostos a produção em excesso é permitida uma vez que, é estocada para períodos seguintes no intuito de satisfazer demandas futuras, o que torna sem sentido a aplicação de tais critérios de redução.

## 3 Revisão bibliográfica de problemas integrados

Há alguns anos, os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque estão sendo cada vez mais tratados de maneira integrada. Farley (1988) foi possivelmente o primeiro trabalho que integra o problema de corte de estoque ao problema de dimensionamento de lotes. O autor aplicou o trabalho em uma indústria de roupas, em que o problema envolve cortes bidimensionais irregulares. Os padrões de corte foram definidos como retângulos com comprimento igual à largura do rolo de tecido e diversas larguras. Tais retângulos foram utilizados para cortar os itens finais.

Hendry *et al.* (1996) realizaram um estudo de caso em uma fábrica de componentes de cobre. A produção consiste em derreter pedaços de cobre em uma fornalha produzindo barras que são cortadas a fim de produzir os itens finais. O objetivo do trabalho foi investigar métodos alternativos de geração de planos de produção para a fundição a fim de minimizar os custos e atender a demanda. Os autores propuseram um procedimento de solução de duas fases. Na primeira fase são investigados métodos heurísticos alternativos e uma solução ótima utilizando programação inteira foi proposta para a segunda fase.

Nonas e Thorstenson (2000) estudaram o problema acoplado de corte de estoque e dimensionamento de lotes com custo de setup em uma companhia norueguesa que produz caminhões *off-road*. A empresa precisa de um planejamento da produção que minimize os custos totais no processo de corte e linha de produção. Os autores apresentaram um modelo e propuseram diferentes métodos de solução.

Gramani e França (2006) formularam um modelo matemático para o problema de dimensionamento de lotes acoplado ao problema de corte de estoque. O objetivo do modelo é minimizar a perda e os custos de estocagem e preparações de máquina. Neste trabalho, os autores também propuseram um método de solução baseado em uma analogia com o problema do caminho mínimo em uma rede. Resultados computacionais comparando o método proposto ao método utilizado em indústrias são apresentados.

Poltronieri *et al.* (2008) estudaram o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque inserido em uma indústria de papel. Os autores analisaram o processo de produção, propuseram um modelo matemático para máquinas que operam em paralelo e apresentaram dois métodos heurísticos. O primeiro é baseado na relaxação lagrangiana sobre o conjunto de restrições de integração e o segundo consiste na resolução do problema de corte cuja solução é utilizada como parâmetro para o problema de dimensionamento de lotes que é resolvido na seqüência. Testes computacionais foram realizados e mostram que a segunda heurística é mais eficiente que a primeira.

Gramani *et al.* (2009) apresentaram um modelo de dimensionamento de lotes integrado ao corte de estoque que incorpora a conjectura que é mais vantajoso antecipar a produção de determinados lotes de produtos finais. É proposto um método heurístico baseado no método de relaxação lagrangiana com o método do subgradiente para atualizar os vetores multiplicadores de Lagrange. O método foi testado computacionalmente com dados gerados de maneira aleatória e comparado com a decomposição heurística, isto é, a prática industrial de tratar os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque de forma separada.

Ghidini e Arenales (2009) trataram os problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque de maneira acoplada em uma indústria de móveis. Para resolver o problema, que considera a composição final dos produtos, os autores propuseram duas heurísticas baseadas no método primal simplex com geração de colunas. Uma das heurísticas resolve o modelo acoplado e, a outra, a heurística de decomposição separa o modelo acoplado em dois modelos menores e os resolve por um procedimento 2-estágios. No trabalho, é proposto também procedimentos para que uma solução inteira seja obtida.

Poldi e Arenales (2010) estudaram o problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo. Os autores resolveram a relaxação linear do modelo proposto através do método simplex com geração de colunas e duas abordagens para o arredondamento são propostas e testadas. As técnicas desenvolvidas são de horizonte rolante, isto é, uma solução inteira é obtida para o primeiro período e para os demais períodos a solução continua fracionária. Na próxima etapa, após o primeiro período ter sido resolvido, novos pedidos podem ser incluídos ou pedidos podem ser cancelados. Então, a carteira de pedidos é atualizada e um novo problema de corte multiperíodo é resolvido.

Santos *et al.* (2011) apresentaram um modelo de otimização inteira mista para o problema de dimensionamento de lotes integrado ao problema de corte de estoque no contexto de uma fábrica de móveis. Os autores consideraram os padrões de corte usados pela indústria e padrões de corte n-grupos (Rangel e Figueiredo, (2008)) para resolver o problema com um conjunto de dados reais fornecidos pela fábrica.

Gramani *et al.* (2011) também estudaram um método de otimização linear para o problema acoplado de dimensionamento de lotes e corte de estoque no contexto de uma fábrica de móveis. Os autores propuseram um modelo para o problema integrado e decompuseram este modelo em dois, um para o problema de dimensionamento de lotes e outro para o problema de corte de estoque a fim de retratar o método de solução que as indústrias praticam. O problema integrado foi resolvido usando a técnica de geração de colunas e resultados computacionais, inclusive comparando a técnica de geração de colunas e a técnica da decomposição, foram apresentados. É mostrado que a técnica de geração de colunas é capaz de obter ganhos acima de 12,7%, quando comparado com o modelo de decomposição usado na prática.

Alem e Morabito (2012) utilizaram ferramentas de otimização robusta para resolver o problema de dimensionamento de lotes integrado ao corte de estoque na indústria de móveis, quando os custos de produção e produtos demandados são parâmetros incertos. Testes computacionais foram realizados utilizando dados reais e simulados.

Vanzela *et al.* (2013) trataram o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque também no contexto de uma fábrica moveleira de pequeno porte. No trabalho foi simulado parcialmente a prática da fábrica em questão e proposto um modelo integrando os dois problemas, que se mostrou mais vantajoso. Tal modelo é baseado no modelo proposto em Gramani *et al*. (2011).

Leão e Arenales (2012) estudaram uma simplificação do modelo estudado em Poltronieri *et al.* (2008). Duas abordagens são estudadas sendo que, na primeira, um único tipo de objeto é considerado e, na segunda, vários tipos de objetos diferentes são considerados. Foram propostas três formulações para cada abordagem: formulação compacta, formulação estendida e formulação estendida combinada com a decomposição de Dantzig-Wolfe (Dantzig e Wolfe (1960)). Os autores resolvem as duas últimas formulações por métodos de geração de colunas, e ao final do método, as variáveis foram redefinidas como inteiras para determinar uma solução factível.

Em trabalhos mais recentes, Arbibi e Marinelli (2014) propuseram uma formulação linear inteira para o problema de corte de estoque multi-período com prazos para a entrega, minimizando uma combinação linear entre os custos de matéria prima e atraso na entrega. Os autores também desenvolveram um algoritmo primal e método de enumeração implícita. Os resultados computacionais comprovam a qualidade dos modelos quando comparado a resultados da literatura, mesmo para instâncias não triviais.

Silva *et al*. (2014) apresentaram dois modelos de programação inteira para o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque. Nestes modelos são permitidos a antecipação dos itens para a produção, como também, o armazenamento de sobras reaproveitáveis para o processo de corte em períodos posteriores. Os autores propuseram duas heurísticas, para as quais, avaliam os modelos através de um estudo computacional, verificando a qualidade das soluções, quando comparadas a trabalhos da literatura.

Embora existam vários trabalhos na literatura, as diferenças dos problemas tratados não permitem uma comparação entre os resultados obtidos por cada método proposto.

Os modelos propostos neste trabalho contribuem para a literatura no sentido de que consideram a reformulação para o problema de dimensionamento de lotes como um problema do caminho mínimo, integrada ao problema de corte de estoque. Assim como as extensões para o caso multi-período dos modelos *KT* e *VC* e suas considerações no problema integrado.

## 4 Modelos matemáticos para o problema integrado

Para os modelos matemáticos que serão apresentados a seguir, considere os seguintes dados:

**Índices:**

$t = 1, 2, ..., T$: períodos de tempo;

$i = 1, 2, ..., m$: itens;

$k = 1, 2, ..., K$: objetos disponíveis em estoque;

$j = 1, 2, ..., n$: padrões de corte.

**Parâmetros:**

$sc_{it}$: custo de preparação de máquina para a produção do item *i* no período *t*;

$hc_{it}$: custo unitário de estocagem do item *i* no período *t*;

$d_{it}$: demanda do item *i* no período *t*;

$sd_{itr}$: soma das demandas do item *i* do período *t* até *r*;

$cv_{itr}$: custo para estocar o item *i* no período *t* em quantidade que satisfaça as demandas para os períodos *t* até *r*;

$W$: comprimento do objeto;

$w_i$: comprimento do item *i*;

$\alpha_{ij}$: quantidade do item *i* cortada no padrão de corte *j*;

$co$: custo de cortar um objeto.

**Variáveis:**

$X_{it}$: unidades do item *i* produzidas no período *t*;

$S_{it}$: unidades do item *i* estocadas no período *t*;

$Y_{it}$: variável binária que indica se há produção do item *i* no período *t*;

$zv_{itr}$: variável que indica se o plano de produção do item *i* no período *t* satisfaz a demanda do item *i* do período *t* até o período *r*;

$y_{kt}$: variável binária que indica se o objeto *k* é utilizado no período *t*;

$h_{ikt}$: quantidade do item *i* cortada do objeto *k* no período *t*;

$x_{jt}$: número de objetos cortados segundo o padrão de corte *j* no período *t*;

$f_t$: fluxo que passa pela rede no período *t*;

$z_{jlt}$: número de padrões de corte que possuem um item de comprimento *(l-j)* alocado a uma distância *j* do início do objeto no período *t*.

***Modelo WWKT***

O primeiro modelo proposto, integra o modelo baseado em Wagner e Whitin (1958) para modelar o problema de dimensionamento de lotes e o modelo atribuído a Kantorovich (1960) para modelar o problema de corte de estoque. O modelo integrado a seguir será denotado por WWKT.

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} sc_{it}Y_{it} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} hc_{it}S_{it} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} coy_{kt} \qquad (1)$$

Sujeito a:

$$X_{i1} - S_{i1} = d_{i1} \qquad i = 1, 2,..., m \qquad (2)$$

$$S_{i,t-1} + X_{it} - S_{it} = d_{it} \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t = 2, 3,..., T \qquad (3)$$

$$X_{it} \leq sd_{itT}Y_{it} \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t = 1, 2,..., T \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i h_{ikt} \leq Wy_{kt} \qquad k = 1, 2,..., K \text{ e } t = 1, 2,..., T \qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{K} h_{ikt} = X_{it} \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t = 1, 2..., T \qquad (6)$$

$$h_{ikt} \in Z_+ \qquad i = 1, 2,..., m;\ k = 1, 2,..., K \text{ e } t = 1, 2,..., T \qquad (7)$$

$$X_{it}, S_{it} \in R_+ \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t = 1, 2..., T \qquad (8)$$

$$Y_{it}, y_{kt} \in \{0,1\} \qquad i = 1, 2,..., m;\ k = 1, 2,..., K \text{ e } t = 1, 2,..., T \qquad (9)$$

Esse modelo consiste em determinar o tamanho dos lotes e a quantidade de objetos a ser cortada de modo a minimizar a soma dos custos de preparação e estocagem e corte de objetos, cujo objetivo é atender a demanda dos itens a cada período.

A função objetivo (1) minimiza os custos de preparação de máquinas e estocagem (modelo WW) e os custos relativos aos objetos utilizados (modelo KT). As restrições (2), (3) e (4) provém do problema de dimensionamento de lotes (modelo WW). Os dois primeiros conjuntos (2) e (3) garantem que a demanda é satisfeita considerando produção e estoque e, a restrição (4) assegura que os custos de preparação são considerados quando existe produção. O conjunto de restrição (5) vem do problema de corte de estoque (modelo KT) e garante que se o objeto *k* for usado ($y_{kt} = 1$), a combinação dos itens que nele aparecem não deve exceder seu comprimento *W*. A restrição (6) é a responsável pela integração da decisão de dimensionamento de lotes com o corte de estoque, pois ela relaciona a variável de produção com a variável de corte, ou seja, deve-se cortar uma quantidade de itens suficiente para atender a quantidade que se deseja produzir. Por fim, as restrições (7), (8) e (9) são os domínios das variáveis.

***Modelo WWVC***

O modelo de Wagner Whithin também foi integrado ao modelo de Valério de Carvalho (1999, 2002) e será chamado por WWVC, sendo apresentado a seguir:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} sc_{it}Y_{it} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} hc_{it}S_{it} + \sum_{t=1}^{T} cof_t \tag{10}$$

Sujeito a:

$$X_{i1} - S_{i1} = d_{i1} \qquad i = 1, 2,..., m \tag{11}$$

$$S_{i,t-1} + X_{it} - S_{it} = d_{it} \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t = 2, 3,..., T \tag{12}$$

$$X_{it} \le sd_{itT}Y_{it} \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t = 1, 2,..., T \tag{13}$$

$$-\sum_{(0,l)\in A} z_{0lt} = -f_t \qquad t = 1, 2,..., T \tag{14}$$

$$\sum_{(j,l)\in A} z_{jlt} - \sum_{(l,k)\in A} z_{lkt} = 0 \qquad l = 1, 2,..., W\text{-}1 \text{ e } t = 1, 2,..., T \tag{15}$$

$$\sum_{(j,W)\in A} z_{jWt} = f_t \qquad t = 1, 2,..., T \tag{16}$$

$$\sum_{(h,h+w_i)\in A} z_{h,h+w_i,t} = X_{it} \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t = 1, 2,..., T \tag{17}$$

$$z_{jlt}, f_t \in Z_+ \qquad (j, l)\in A \text{ e } t = 1, 2,..., T \tag{18}$$

$$X_{it}, S_{it} \in R_+ \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t = 1, 2,..., T \tag{19}$$

$$Y_{it} \in \{0,1\} \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t = 1, 2,..., T \tag{20}$$

A função objetivo (10) minimiza os custos de preparação de máquinas e estocagem dos itens (modelo WW), assim como o custo do fluxo que passa pela rede (modelo VC). O fluxo que passa pela rede no modelo VC representa o número de objetos utilizados pois, uma unidade de fluxo define um caminho que por sua vez define um padrão de corte. Logo, o fluxo total que passa pela rede pode ser interpretado como a quantidade de objetos cortados.

As restrições (11), (12) (13) remetem ao problema de dimensionamento de lotes (modelo WW). As restrições (14), (15) e (16) são de conservação de fluxo e são características do modelo de Valério de Carvalho. O conjunto de restrições (17) integra os dois problemas, pois, relaciona a variável de produção com a variável de corte, ou seja, deve-se cortar uma quantidade de itens suficiente para atender a quantidade que se deseja produzir. Observa-se que, quando se considera a última parcela da função objetivo (10) junto com as restrições (14)-(17) tem-se a formulação VC adaptada ao problema integrado, ou seja, trata-se de um problema de minimização de fluxo entre o vértice 0 e o vértice $W$ com restrições adicionais impondo que a soma dos fluxos dos arcos representando cada item deve ser maior ou igual que a quantidade a ser produzida deste item. Por último, as restrições (18), (19) e (20) são os domínios das variáveis.

***Modelo EMKT***

O modelo proposto a seguir, integra a reformulação proposta por Eppen e Martin (1987) ao modelo de Kantorovich. Esse modelo será referido como EMKT.

Para o modelo de Eppen e Martin, os custos envolvidos são os custos de estoque e preparo. O custo de estoque $cv_{itr}$ será dado em termos de $hc_{it}$ e da demanda $d_{it}$ sendo calculado como segue:

$$cv_{itr} = \sum_{s=t+1}^{r}\sum_{u=t}^{s-1} hc_{iu} d_{is} \quad i = 1,2,\ldots,m;\ t=1,2,\ldots,T \text{ e } r = 1, 2,\ldots,T\ (r \geq t)$$

Além disso, é necessário a definição da seguinte variável binária $zv_{itr}$, que indica se o plano de produção do item $i$ no período $t$ satisfaz a demanda deste item do período de $t$ até $r$.

Na formulação clássica a quantidade produzida do item $i$ no período $t$ é dada pela variável $X_{it}$. Nesta reformulação será dada em termos da variável $zv_{itr}$. Tais variáveis possuem a seguinte correspondência:

$$X_{it} = d_{it} zv_{itt} + (d_{it} + d_{it+1}) zv_{itt+1} + \ldots + (d_{it} + d_{it+1} + \ldots + d_{itT}) zv_{itT}$$

ou seja,

$$X_{it} = \sum_{r=t}^{T} sd_{itr} zv_{itr}, \qquad i = 1, 2,\ldots, m \text{ e } t = 1, 2,\ldots, T$$

Assim, o modelo EMKT é dado por:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T} sc_{it} Y_{it} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\sum_{r=t}^{T} cv_{itr} zv_{itr} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} coy_{kt} \tag{21}$$

Sujeito a:

$$\sum_{r=1}^{T} zv_{i1r} = 1 \qquad i = 1, 2,\ldots, m \tag{22}$$

$$\sum_{r=1}^{t-1} zv_{irt-1} = \sum_{r=t}^{T} zv_{itr} \qquad i = 1, 2,\ldots, m \text{ e } t = 2, 3,\ldots, T \tag{23}$$

$$\sum_{r=t}^{T} zv_{itr} \leq Y_{it} \qquad i = 1, 2,\ldots, m \text{ e } t = 1, 2,\ldots, T \tag{24}$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i h_{ikt} \leq W y_{kt} \qquad k = 1, 2,\ldots, K \text{ e } t = 1, 2,\ldots, T \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{K} h_{ikt} = \sum_{r=t}^{T} zv_{itr} sd_{itr} \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t = 1, 2,..., T \qquad (26)$$

$$h_{ikt} \in Z_{+} \qquad i = 1, 2,..., m; \; k = 1, 2,..., K \text{ e } t = 1, 2,..., T \qquad (27)$$

$$zv_{itr} \in R_{+} \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t, r = 1, 2,..., T \; (r \geq t) \qquad (28)$$

$$Y_{it}, y_{kt} \in \{0,1\} \qquad i = 1, 2,..., m \text{ e } t = 1, 2,..., T \; e \; t = 1, 2,..., T \qquad (29)$$

A função objetivo (21) minimiza a soma dos custos de estoque e preparação de máquina de acordo com o modelo EM, como também, a quantidade de objetos a serem cortados.

As restrições (22) e (23) definem as restrições de fluxo do modelo EM. Para cada item *i*, um fluxo unitário é enviado na rede (restrição (22)), impondo que a demanda deste item seja satisfeita sem atrasos em todos os períodos (restrição (23)). O conjunto de restrições (24) também remete ao modelo EM e assegura que haverá produção para um item *i* num período *t*, apenas se a máquina estiver preparada para produzir este item.

A restrição (25) remete ao problema de Kantorovick, que refere-se a capacidade do objeto. O conjunto de restrições (26) integra os dois problemas, pois, relaciona a variável de produção com a variável de corte, ou seja, deve-se cortar uma quantidade de itens suficiente para atender a quantidade que se deseja produzir. Por fim, as restrições (27), (28) e (29) são os domínios das variáveis.

***Modelo EMVC***

A formulação de Eppen e Martin também foi integrada ao modelo de Valério de Carvalho e esta formulação será denotada por EMVC e é apresentada a seguir.

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} sc_{it} Y_{it} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} \sum_{r=t}^{T} cv_{itr} zv_{itr} + \sum_{t=1}^{T} cof_{t} \qquad (30)$$

Sujeito a:

$$\sum_{r=1}^{T} zv_{i1r} = 1 \qquad i=1,2,...,m \qquad (31)$$

$$\sum_{r=1}^{t-1} zv_{irt-1} = \sum_{r=t}^{T} zv_{itr} \qquad i=1,2,...,m \text{ e } t=2,3,...,T \qquad (32)$$

$$\sum_{r=t}^{T} zv_{itr} \leq Y_{it} \qquad i=1,2,...,m \text{ e } t=1,2,...,T \qquad (33)$$

$$-\sum_{(0,l)\in A} z_{0lt} = -f_{t} \qquad t=1,2,...,T \qquad (34)$$

$$\sum_{(j,l)\in A} z_{jlt} - \sum_{(l,k)\in A} z_{lkt} = 0 \qquad l=1,2,...,W\text{-}1 \text{ e } t=1,2,...,T \qquad (35)$$

$$\sum_{(j,W)\in A} z_{jWt} = f_t \qquad t=1,2,...,T \qquad (36)$$

$$\sum_{(h,h+w_i)\in A} z_{h,h+w_i,t} = \sum_{r=t}^{T} sd_{itr} zv_{itr} \qquad i=1,2,...,m \text{ e } t=1,2,...,T \qquad (37)$$

$$z_{jlt}, f_t \in Z_+ \qquad (j,l)\in A \text{ e } t=1,2,...,T \qquad (38)$$

$$zv_{itr} \in R_+ \qquad i=1,2,...,m \text{ e } t,r=1,2,...,T\ (r\geq t) \qquad (39)$$

$$Y_{it} \in \{0,1\} \qquad i=1,2,...,m \text{ e } t=1,2,...,T \qquad (40)$$

A função objetivo (30) minimiza a soma dos custos de estoque e preparação de máquina de acordo com o modelo EM, como também, a quantidade de objetos a serem cortados.

As restrições (31), (32) e (33) definem as restrições de fluxo do modelo EM.

As restrições (34), (35) e (36) são de conservação de fluxo e são características do modelo de Valério de Carvalho. O conjunto de restrições (37) integra os dois problemas, pois, relaciona a variável de produção com a variável de corte, ou seja, deve-se cortar uma quantidade de itens suficiente para atender a quantidade que se deseja produzir.

Além destes modelos, os modelos integrados envolvendo VC após a aplicação dos critérios de redução descritos na Seção 2, também foram considerados no estudo computacional e serão referidos como WWVCcr e EMVCcr.

## 5 Resultados computacionais

Nesta seção apresentaremos os resultados computacionais para avaliar e comparar o desempenho dos modelos propostos na Seção 4. Os modelos foram escritos na sintaxe do AMPL (Fourer *et al.* (2002)) e como *solver* utilizamos o CPLEX 12.5. O tempo máximo de processamento foi fixado em 600 segundos e o *gap* em 0,1%, ou seja, quando o *gap* entre o limitante superior e inferior for menor que 0,1% o *solver* interrompe a resolução do problema e será considerado que este modelo obteve a solução ótima neste exemplar. Para os testes computacionais foi utilizado um computador com processador Intel Corel i7, com 3,4 GHz e 16 GB de memória RAM, sob a plataforma do Windows 7.

Desenvolvemos um gerador em que a demanda, comprimento dos itens, comprimento do objeto e número de períodos são como em Poldi e Arenales (2010). Os custos de preparação de máquina e estocagem são gerados de maneira aleatória e o custo de utilização de um objeto (*co*) é fixado em 1.

Como Poldi e Arenales (2010) estudam o problema com vários tipos de objetos em estoque, neste trabalho, consideramos apenas o comprimento do primeiro tipo de objeto.

Os experimentos estão divididos em 8 classes de problemas, sendo 4 classes com custo de preparação alto e 4 classes com custo de preparação baixo e, para cada classe foram gerados 20 exemplos.

Os dados de Poldi e Arenales (2010) nos quais nos baseamos seguem a seguinte configuração:

- número de períodos: $T = 3$ e 6;
- número de tipos de itens demandados: $m = 10$ e 20;
- comprimento dos objetos em estoque: $W_l \in [300, 1000]$ (Poldi e Arenales (2010) estudam o problema com vários tipos de objetos e neste trabalho consideramos apenas um tipo);
- comprimento dos itens demandados: $w_i \in [0{,}1W^*, 0{,}4W^*]$, onde $W^* = \sum_{l=1}^{L} W_l / L$, em que $L$ é a quantidade de tipos de objetos;
- demanda dos itens: $d_{it} \in [10, 200]$ (a demanda é mantida constante para todos os exemplos de uma mesma classe);

Para gerar os custos de estocagem e preparação de máquinas, inicialmente, nos baseamos em Trigeiro *et al.* (1989) que geram custos de estocagem no intervalo [1, 5] e consideram dois intervalos para gerar os custos de preparação de máquina, [100, 500] e [200, 1000], gerando assim, classes com custo de preparação baixo e alto. Porém, como os custos do problema integrado favorecem a redução da perda e consequentemente o aumento de estoque e redução de preparações, os custos dos dados de Trigeiro *et al.* (1989) (que são para o problema de dimensionamento de lotes) fizeram com que ocorresse produção apenas no primeiro período, para uma grande quantidade de exemplos.

Por este motivo, após alguns testes computacionais, alteramos os intervalos de geração de custo de preparação de máquina e mantivemos o intervalo de geração de custo de estoque:

- custo de estocagem: $hc_{it} \in [1, 5]$;
- custo de preparação: $sc_{it} \in [50, 200]$ (para as classes com custos de preparação baixo);
- custo de preparação: $sc_{it} \in [100, 400]$ (para as classes com custos de preparação alto);

Dessa forma, os parâmetros que definem as 8 classes são dados na Tabela 1.

Tabela 1 - Definição das classes dos exemplos

| Classes | Períodos (*T*) | Itens (*m*) | Custo de preparação |
|---|---|---|---|
| Classe 1 | 3 | 10 | Alto |
| Classe 2 | 3 | 20 | Alto |
| Classe 3 | 3 | 10 | Baixo |
| Classe 4 | 3 | 20 | Baixo |
| Classe 5 | 6 | 10 | Alto |
| Classe 6 | 6 | 20 | Alto |
| Classe 7 | 6 | 10 | Baixo |
| Classe 8 | 6 | 20 | Baixo |

Para os modelos integrados envolvendo o modelo de Kantorovich (KT), é necessário um limitante superior ($K$) para a quantidade de objetos disponíveis em estoque. Foram realizados testes computacionais para o problema de corte de estoque KT, com $K$ igual à solução ótima fornecida por VC, bem como, para $K$ igual a múltiplos desse valor ótimo. Após estes testes, o valor de $K$ para os modelos integrados WWKT e EMKT foi fixado igual ao triplo da solução fornecida pelos modelos integrados envolvendo VC.

A seguir, será apresentado os resultados computacionais obtidos ao resolvermos os modelos integrados propostos na Seção 4. Estes resultados serão analisados e comparados considerando os seguintes critérios: *gap*, limitantes superiores e inferiores, tempo computacional para resolver a relaxação linear e o problema inteiro. Deve-se observar que em vários casos, devido à limitação do tempo computacional, uma solução aproximada é apresentada e não a solução ótima. Será apresentado também os mesmos resultados para os modelos envolvendo VC, porém após a aplicação dos critérios de redução (modelos VCcr).

***Limitantes inferiores: relaxação linear***

A primeira análise realizada, compara os limitantes inferiores obtidos ao resolver a relaxação linear dos modelos exatos, isto é, as restrições de integralidade das variáveis modelos foram relaxadas manualmente e os modelos obtidos foram resolvidos pelo *solver*. A Tabela 2 apresenta os resultados computacionais para cada classe e uma média geral. Como esperado, para todas as classes, o modelo WWKT apresentou limitantes inferiores piores que WWVC e WWVCcr e, o mesmo acontece quando comparamos EMKT com EMVC e EMVCcr. Uma melhora significativa, em torno de 51% na média geral, foi observada ao considerar a reformulação EM para o problema de dimensionamento de lotes, com os seus respectivos problemas de corte de estoque, sendo que esta melhora pode chegar a 70%, o que mostra a qualidade da relaxação linear dos modelos reformulados. Os critérios de redução não afetaram o valor da relaxação linear.

Tabela 2 - Limitantes inferiores

| Classes | WWKT | WWVC | WWVCcr | EMKT | EMVC | EMVCcr |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Classe 1 | 3715,20 | 3718,04 | 3718,04 | 4454,54 | 4457,10 | 4457,10 |
| Classe 2 | 7948,18 | 7949,84 | 7949,84 | 9856,35 | 9858,57 | 9858,57 |
| Classe 3 | 2149,40 | 2150,14 | 2150,14 | 2732,15 | 2732,97 | 2732,97 |
| Classe 4 | 4404,16 | 4406,72 | 4406,72 | 5917,58 | 5921,72 | 5921,72 |
| Classe 5 | 5667,11 | 5675,76 | 5675,76 | 9145,40 | 9158,83 | 9158,83 |
| Classe 6 | 10292,33 | 10295,11 | 10295,11 | 16992,96 | 16999,21 | 16999,21 |
| Classe 7 | 3188,91 | 3195,62 | 3195,62 | 5756,95 | 5767,96 | 5767,96 |
| Classe 8 | 6136,98 | 6138,34 | 6138,34 | 11019,01 | 11022,63 | 11022,63 |
| Média | 5437,78 | 5440,82 | 5440,82 | 8234,37 | 8239,87 | 8239,87 |

***Tempo computacional: relaxação linear***

O tempo computacional para resolver a relaxação linear dos modelos relaxados é comparado e, as médias são apresentadas na Tabela 3. Para a maioria das classes, o modelo WWKT encontrou o valor da relaxação linear mais rápido que WWVC, porém demorou mais que o modelo EMKT. Se olharmos para os modelos WWVC e EMVC, o último resolveu a relaxação linear mais rápido na média geral.

Devido a redução na quantidade de variáveis, os modelos WWVCcr e EMVCcr encontraram o limitante inferior em um tempo computacional consideravelmente menor que os respectivos modelos sem critério de redução, sendo que EMVCcr foi cerca de 17% mais rápido neste quesito.

Tabela 3 - Tempo computacional para resolver a relaxação linear

| Classes | WWKT | WWVC | WWVCcr | EMKT | EMVC | EMVCcr |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Classe 1 | 0,121 | 0,725 | 0,081 | 0,127 | 0,406 | 0,062 |
| Classe 2 | 0,702 | 2,409 | 0,247 | 0,629 | 2,216 | 0,201 |
| Classe 3 | 0,219 | 0,976 | 0,072 | 0,134 | 0,770 | 0,052 |
| Classe 4 | 1,032 | 2,050 | 0,257 | 0,782 | 2,490 | 0,233 |
| Classe 5 | 1,212 | 1,575 | 0,218 | 0,727 | 1,518 | 0,138 |
| Classe 6 | 5,927 | 2,173 | 0,513 | 3,710 | 2,435 | 0,440 |
| Classe 7 | 1,291 | 1,519 | 0,216 | 0,798 | 1,226 | 0,170 |
| Classe 8 | 5,892 | 2,276 | 0,502 | 3,958 | 2,456 | 0,430 |
| Média | 2,049 | 1,713 | 0,263 | 1,358 | 1,689 | 0,216 |

***Limitantes Superiores***

As médias dos valores das funções objetivos para cada classe e cada modelo, assim como a média geral das classes se encontram na Tabela 4. Nesta análise foram desconsideradas as classes 6 e 8 para a formulação EMKT. Isto se deve ao fato de que, no tempo computacional estabelecido o modelo não encontrou uma solução inteira para 10 exemplares na classe 6 e, 19 exemplares na classe 8. Assim para efeito de comparação entre os modelos propostos, estas classes não foram avaliadas no modelo EMKT.

Os modelos envolvendo VCcr melhoram ligeiramente os valores dos limitantes superiores quando comparados aos modelos integrados envolvendo KT, o mesmo não ocorre para VC em todas as classes. Entre os modelos WWKT e EMKT, o último mostrou-se um pouco pior.

Tabela 4 - Limitantes superiores

| Classes | WWKT | WWVC | WWVCcr | EMKT | EMVC | EMVCcr |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Classe 1 | 4460,40 | 4458,00 | 4458,05 | 4460,45 | 4458,15 | 4458,20 |
| Classe 2 | 9869,10 | 9861,75 | 9861,75 | 9871,10 | 9861,65 | 9861,70 |
| Classe 3 | 2736,80 | 2734,50 | 2734,65 | 2736,10 | 2734,40 | 2734,55 |
| Classe 4 | 5931,35 | 5924,60 | 5924,60 | 5933,55 | 5924,15 | 5923,70 |
| Classe 5 | 9166,70 | 9164,10 | 9162,75 | 9169,55 | 9162,60 | 9163,40 |
| Classe 6 | 17032,60 | 17033,25 | 17004,60 | * | 17025,30 | 17006,10 |
| Classe 7 | 5780,35 | 5773,20 | 5771,30 | 5783,30 | 5771,45 | 5770,80 |
| Classe 8 | 11055,55 | 11100,70 | 11028,05 | * | 11495,95 | 11027,30 |
| Média | 8254,11 | 8256,26 | 8243,22 | * | 8304,21 | 8243,22 |

(*) não obteve nenhuma solução inteira no tempo estabelecido

### *GAP e Número de Soluções Ótimas*

O *gap* exibido é fornecido pelo *solver* CPLEX, e é calculado da seguinte forma: $gap=|LS-LI|/(e^{-10}+|LS|)$, em que LS e LI são, respectivamente, os valores dos limitantes superiores e inferiores. A Tabela 5 apresenta o *gap* médio, em porcentagem, de cada classe e a média geral para cada modelo.

Em consequência dos resultados obtidos com os limitantes inferiores e superiores, o *gap* dos modelos envolvendo a formulação KT para o problema de corte, são maiores quando comparados aqueles envolvendo VC, exceto para a classe 8, em que um exemplar não encontrou resultado satisfatório, como pode ser observado pela média desta classe (0,64 e 2,4). Os modelos WWVCcr e EMVCcr encontraram os melhores limitantes quando comparados aos modelos sem critérios de redução, cerca de 65% e 89% melhores, respectivamente.

A coluna SO da Tabela 5 representa a quantidade de exemplos de cada classe que o *solver* provou a otimalidade. Como observado anteriormente, um dos critérios de parada foi fixar o valor para o *gap* de 0,1%, por isso, a otimalidade de alguns exemplos foi provada dentro do MIP *gap*, o que justifica a diferença dos limitantes superiores e dos *gaps* entre aqueles exemplares em que foi provada a otimalidade. Nota-se que, mais uma vez, os modelos integrados envolvendo VC apresenta vantagem significativa sobre aqueles envolvendo KT.

Uma grande dificuldade foi observada nos problemas com seis períodos para a formulação KT, nestas classes a formulação não obteve a solução ótima para a maioria dos exemplares. Cabe observar a vantagem ocorrida pela formulação VCcr, na qual provou-se a otimalidade para todos os 20 exemplares de cada classe.

Tabela 5 - GAP (%) e número de soluções ótimas

| | **WWKT** | | **WWVC** | | **WWVCcr** | | **EMKT** | | **EMVC** | | **EMVCcr** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Classes** | **Gap** | **SO** | **Gap** | **SO** | **Gap** | **SO** | **Gap** | **SO** | **Gap** | **SO** | **Gap** | **SO** |
| Classe 1 | 0,10 | 18 | 0,01 | 20 | 0,01 | 20 | 0,09 | 18 | 0,02 | 20 | 0,02 | 20 |
| Classe 2 | 0,12 | 6 | 0,03 | 20 | 0,03 | 20 | 0,14 | 0 | 0,03 | 20 | 0,03 | 20 |
| Classe 3 | 0,15 | 5 | 0,04 | 20 | 0,04 | 20 | 0,14 | 3 | 0,04 | 20 | 0,04 | 20 |
| Classe 4 | 0,19 | 0 | 0,05 | 20 | 0,05 | 20 | 0,22 | 0 | 0,04 | 20 | 0,03 | 20 |
| Classe 5 | 0,16 | 4 | 0,06 | 20 | 0,06 | 20 | 0,18 | 4 | 0,04 | 20 | 0,04 | 20 |
| Classe 6 | 0,33 | 0 | 0,21 | 16 | 0,07 | 20 | * | 0 | 0,07 | 18 | 0,04 | 20 |
| Classe 7 | 0,40 | 0 | 0,09 | 19 | 0,07 | 20 | 0,45 | 0 | 0,06 | 19 | 0,04 | 20 |
| Classe 8 | 0,33 | 0 | 0,64 | 16 | 0,06 | 20 | * | 0 | 2,40 | 15 | 0,04 | 20 |
| Média | 0,22 | | 0,14 | | 0,05 | | * | | 0,34 | | 0,04 | |

(*) não obteve nenhuma solução inteira no tempo estabelecido

***Tempo computacional***

O tempo computacional médio utilizado em cada modelo para resolver o problema encontra-se na Tabela 6. Podemos observar que, quando utilizamos o modelo WW para o problema de dimensionamento de lotes, o modelo VC apresenta tempos computacionais, na média geral 80% melhores que KT. Resultado similar acontece quando comparamos os modelos EMKT e EMVC. Como esperado, com a aplicação dos critérios redução nos modelos WWVC e EMVC, o tempo para a resolução dos problemas apresentam reduções ainda mais significativas, cerca de 90% mais rápidas para o WWVCcr e 75% para o EMVCcr.

Tabela 6 - Tempo computacional

| **Classes** | **WWKT** | **WWVC** | **WWVCcr** | **EMKT** | **EMVC** | **EMVCcr** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Classe 1 | 166,037 | 2,721 | 0,791 | 158,18 | 3,97 | 1,27 |
| Classe 2 | 508,077 | 17,773 | 4,095 | 600,00 | 12,98 | 3,15 |
| Classe 3 | 530,570 | 9,965 | 1,769 | 535,99 | 8,08 | 1,74 |
| Classe 4 | 600,000 | 37,249 | 5,081 | 600,00 | 17,56 | 3,61 |
| Classe 5 | 564,328 | 79,494 | 8,957 | 549,49 | 104,97 | 10,21 |
| Classe 6 | 600,000 | 279,975 | 20,991 | 600,00 | 159,71 | 55,30 |
| Classe 7 | 600,000 | 128,106 | 10,358 | 600,00 | 195,23 | 19,19 |
| Classe 8 | 600,000 | 276,038 | 23,926 | 600,00 | 371,57 | 112,38 |
| Média | 521,126 | 103,915 | 9,496 | 530,457 | 109,26 | 25,85 |

## 6 Conclusões

No presente trabalho realizamos um estudo de modelos matemáticos, encontrados na literatura, para os problemas integrados de dimensionamento de lotes e corte de estoque unidimensional. Para o problema de dimensionamento de lotes, estudamos o modelo de Wagner e Whitin (1958) e uma reformulação baseada no problema do caminho mínimo proposta por Eppen e Martin (1989). Já para o problema de corte de estoque, estudamos para o caso de múltiplos períodos os modelos de Kantorovich (1960) e Valério de Carvalho (1999, 2002) com e sem critérios de redução.

Foram propostas diferentes combinações de modelos para o problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque, que foram resolvidas com um método exato (porém com limitação no tempo de resolução e no *gap*). Foi realizada uma análise computacional com o intuito de comparar as diferentes formulações.

Podemos concluir que os modelos integrados envolvendo a formulação de Valério de Carvalho, apresentam melhores resultados quando comparados aos seus respectivos modelos envolvendo a formulação de Kantorovich.

Com relação ao valor da relaxação linear, os modelos envolvendo a reformulação para o problema de dimensionamento de lotes, apresentam limitantes inferiores consideravelmente mais fortes do que os modelos envolvendo o modelo clássico.

Quando critérios de redução são aplicados aos modelos integrados envolvendo a formulação de Valério de Carvalho, o *gap* tem uma pequena redução. Porém, a diferença mais significativa dos modelos com e sem critério de redução, é o tempo computacional que é significativamente mais baixo quando aplicamos tais critérios.

Como propostas futuras, novos testes, com dados que representam exemplos maiores, devem ser realizados para testar a capacidade dos métodos exatos em resolver o problema. Outro tema interessante para ser explorado em trabalhos futuros é considerarmos a composição final das peças, ou seja, produzir os itens que fazem parte de um produto final e então, compor o produto demandado. Para o problema de dimensionamento de lotes, podem-se considerar variáveis de atraso e restrições de capacidade.

## Agradecimentos

Esta pesquisa contou com o apoio financeiro da CAPES, CNPq e FAPESP (Processos 2012/20631-2 e 2014/01203-5).

## Referências

Alem D. J; Morabito, R. (2012). Production planning in furniture settings via robust optimization problems. Computers and Operations Research, 39, 139-150.

Arbib, C.; Marinelli, F. (2014). On cutting stock with due dates. Omega, 46, 11-20.

Araujo, S. A. de; Clark, A. R. (2013). A priori reformulations for joint rolling-horizon scheduling of materials processing and lot-sizing problem. Computers & Industrial Engineering, 64, 577-585.

Bernardes, E. D.; Araujo, S. A.; Rangel, M. S. N. (2010). Reformulação para um problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes. Pesquisa Operacional, 30, 637-655.

Brahimi, N.; Peres, D. S.; Najid, N. M; Nordli, A. (2006). Single item lot-sizing problem. European Journal of Operational Reserarch, 168, 1-16.

Dantzig, G. B.; Wolfe, P. (1960). Decomposition Principle for Linear Programs. Operations Research, 8, 101-111.

Eppen, G. D.; Martin, R. K. (1987). Determining safety stock in the presence of stochastic lead time and demand. Management Science, 34, 1380-1390.

Farley, A. A. (1988). Mathematical programming models for cutting-stock problems in the clothing industry problems. Journal of Operations Research Society, 1, 41-53.

Fiorotto, D. J.; De Araujo, S. A. (2012). Relaxação Lagrangiana aplicada ao problema de dimensionamento de lotes em máquinas paralelas: Limitantes inferiores. TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 13, 13-24.

Fiorotto, D. J.; De Araujo, S. A. (2014). Reformulation and a Lagrangian heuristic for a lot-sizing problem on parallel machines. Annals of Operations Research, 217, 213-231.

Fourer, R.; Gay, D. M.; Kernighan, B. W. (2002). AMPL: a Modeling Language for Mathematical Programming. Duxbury Press.

Gilmore, P. C.; Gomory, R. E. (1961). A linear programming approach to the cutting stock problem. Operations Research, 9, 848-859.

Gilmore, P. C.; Gomory, R. E. (1963). A linear programming approach to the cutting stock problem - Part II. Operations Research, 11, 863-888.

Ghidini, C. T. L. S.; Arenales, M. N. (2009). Otimização de processos acoplados na indústria de móveis: dimensionamento de lotes e corte de estoque. Anais do CNMAC-Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional.

Gramani, M. C. N.; França, P. M. (2006). The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial process problems. European Journal of Operational Research, 74, 509-521.

Gramani, M. C. N.; França, P. M.; Arenales, M. N. (2009). A Lagrangian relaxation approach to a coupled lot-sizing and cutting stock problem. International Journal of Production Economics, 119, 219-227.

Gramani, M. C. N.; França, P. M.; Arenales, M. N. (2011). A linear optimization approach to the combined production-planning model. Journal of the Franklin Institute, 348, 1523-1536.

Hendry, L. C.; Fok, K. K.; Shek, K. W. (1996). A cutting stock and scheduling problem in the copper industry. Journal of Operations Research Society, 47, 38-47.

Jans, R. (2009). Solving Lot-Sizing Problems on Parallel Identical Machines Using Symmetry-Breaking Constraints. INFORMS Journal on Computing, 21, 123-136.

Jans, R.; Degraeve, Z. (2004). Improved lower bounds for the capacitated lot-sizing problem with setup times. Operations Research Letters, 32, 185-195.

Kantorovich, L. V. (1960). Mathematical methods of organizing and planning production (traduzido de um trabalho russo datado de 1939). Management Science, 6, 366-422.

Karimi, B.; Ghomi, S. F.; Wilson, J. (2003). The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. OMEGA, 31, 365-378.

Leão, A. P. S.; Arenales, M. N. (2012). Análise de modelos matemáticos para o problema de corte de estoque unidimensional acoplado ao dimensionamento de lotes. Anais do XLIV SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro – RJ.

Longhi, A. L. (2013). Modelos Matemáticos para o Problema Integrado de Dimensionamento de Lotes e Corte de Estoque Unidimensional. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual Paulista - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

Melega, G. M.; Fiorotto, D. J.; De Araujo, S. A. (2013). Formulações Fortes para o Problema de Dimensionamento de Lotes com Várias Plantas. TEMA: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, 14, 305-318.

Nonas, S. L.; Thorstenson, A. (2000). A combined cutting-stock and lot-sizing problema. European Journal of Operational Research, 120, 327-342.

Poldi, K. C.; Arenales, M. N. (2010). O Problema de Corte de Estoque unidimensional Multiperíodo. Pesquisa Operacional, 30, 153-174.

Poltronieri, S. C.; Poldi, K. C.; Toledo, F. M. B.; Arenales, M. N. (2008). A coupling cutting stock-lot sizing problem in the paper industry. Annals of Operations Research, 157, 91-104.

Rangel, S.; Figueiredo, A. (2008). O problema de corte de estoque em indústrias de móveis de pequeno e médio porte. Pesquisa Operacional, 28, 451-472.

Santos, S. G.; De Araujo, S. A.; Rangel, S. (2011). Integrated Cutting Machine Programming and Lot Sizing in Furniture Industry. Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento, 3, 249-266.

Silva, E.; Alvelos, F.; Valério de Carvalho, J. M. (2014). Integrating two-dimensional cutting stock and lot-sizing problems. Journal of Operational Research Society, 65, 108-123, 2014.

Valério de Carvalho, J. M. (1999). Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. Annals of Operations Research, 86, 629-659.

Valério de Carvalho, J. M. (2002). LP models for bin packing and cutting stock problems. European Journal of Operational Research, 144, 253-273.

Vanzela, M.; Rangel, S.; Araujo, S. (2013). The integrated lot sizing and cutting stock problem in a furniture factory. In: 11th IFAC Workshop on Intelligent Manufacturing Systems (IMS'13), São Paulo.

Trigeiro, W. W.; Thomas, L. J.; McClain, J. O. (1989). Capacitated Lot-sizing with Setup Times. Management Science, 35, 353-366.

Wagner, H. M.; Whitin, T. M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. Management Science, 5, 89-96.