

PLANEJAMENTO DO GRÁFICO ADAPTATIVO DE CONTROLE DE \bar{X} COM APOIO DO AMBIENTE R

Roberto Campos Leoni^{a*}

^aUniversidade Estadual Paulista (UNESP-FEG) – Guaratinguetá – SP, Brasil

Resumo

Este trabalho descreve como planejar e estimar os parâmetros ótimos de um gráfico adaptativo para monitorar a média de um processo utilizando tamanho da amostra e intervalo variáveis ($\bar{X} - VSSI$). O gráfico de $\bar{X} - VSSI$ foi escolhido por ser um esquema com grande potencial para aplicação prática e apenas requer o conhecimento do tamanho da amostra e do tempo entre seleção das amostras. Cadeias de Markov foram utilizadas para avaliar o desempenho do gráfico com base no tempo médio entre o descontrole do processo e o sinal gerado pelo gráfico. Apresentam-se duas funções escritas em linguagem R que auxiliam o usuário no planejamento de um gráfico de controle adaptativo $\bar{X} - VSSI$.

Palavras-chave: Controle Estatístico de Processos (CEP), Gráfico de controle adaptativo, Cadeia de Markov, Linguagem R.

Abstract

This paper describes how to plan and estimate the optimal parameters of an adaptive chart for monitoring the mean process using variable sample size and sampling interval ($\bar{X} - VSSI$). The $\bar{X} - VSSI$ chart was chosen because it has a great potential for practical application and only requires knowledge of the sample size and the time between sample selections. Markov chains were used to evaluate the performance of the chart based on the average time to signal an off-target process. This article presents two functions written in R language to assist the user in planning an adaptive $\bar{X} - VSSI$ chart.

Keyword: Statistical Process Control (SPC), Adaptive control chart, Markov Chain, R Language.

*Autor para correspondência: e-mail: rcleoni@yahoo.com.br

1. Introdução

Gráficos de controle são utilizados para monitorar processos de produção com o objetivo de sinalizar desvios em relação ao valor alvo de uma característica de qualidade. A detecção de pequenos ou moderados desvios através dos gráficos propostos por Shewhart (1931) é demorada e, por isso, diversos tipos de gráficos têm sido propostos. Reynolds *et al.* (1988), Prabhu *et al.* (1994, 1997), Costa (1994, 1997, 1999), Park e Reynolds (1999) introduziram os gráficos de controle adaptativos que assim são chamados por não apresentarem todos os seus parâmetros fixos. A construção desse tipo de gráfico prevê que pelo menos um de seus parâmetros possa variar. Esses parâmetros são: os limites de controle, o tamanho da amostra e o intervalo de tempo em que uma amostra é coletada.

Em gráficos de controle adaptativos é comum o uso de cadeias de Markov para avaliar o desempenho do gráfico de acordo com o conjunto de parâmetros escolhidos (COSTA, 1997; ZIMMER *et al.*, 2000 e FARAZ e SANIGA, 2011). Para aferir as propriedades estatísticas, utiliza-se a ideia subjacente de dividir o intervalo de variação da estatística monitorada em um conjunto finito de estados, onde os estados transientes da cadeia situam-se na região de controle do gráfico e o estado absorvente na região estabelecida como fora de controle.

Os gráficos adaptativos não são disponibilizados em *softwares* estatísticos tradicionais, apesar de apresentarem melhor desempenho que os gráficos com parâmetros fixos. A determinação dos parâmetros adaptativos não é uma tarefa trivial; deste modo, este artigo propõe o uso de um *software* livre para planejar e estimar os parâmetros ótimos de um gráfico adaptativo para \bar{X} com tamanho da amostra e intervalo variáveis ($\bar{X} - VSSI$). O número médio de amostras até o momento em que o gráfico sinaliza a condição fora de controle (ARL) e o tempo médio entre o instante em que o processo se altera e o instante em

que o gráfico sinaliza a condição fora de controle (ATS) são as medidas de desempenho utilizadas como referência para escolha dos parâmetros.

O gráfico de $\bar{X} - VSSI$ foi escolhido por ser um esquema com grande potencial para aplicação prática, pois sua utilização requer apenas o conhecimento do tamanho da amostra e o tempo entre seleção das amostras depois de estabelecidos os parâmetros ótimos. As propriedades estatísticas do gráfico de controle são otimizadas considerando a abordagem apresentada em Zimmer *et al.* (2000), ou seja, uma cadeia de Markov é utilizada para estabelecer os parâmetros mantendo sob controle os riscos estatísticos tipo I e tipo II (LEONI e COSTA, 2012).

O restante do trabalho está organizado da seguinte forma: a seção 2 apresenta o gráfico de controle de $\bar{X} - VSSI$. Na seção 3, descreve-se o procedimento para avaliar o desempenho de um gráfico de $\bar{X} - VSSI$ usando cadeias de Markov. Na seção 4, apresentam-se duas funções escritas na linguagem R que calculam o desempenho e os parâmetros ótimos do gráfico de $\bar{X} - VSSI$. Finalmente, conclusões e direções de pesquisas futuras completam o artigo.

2. Gráfico de Controle de $\bar{X} - VSSI$

Reynolds *et al.* (1988) foram os primeiros a considerar o projeto adaptativo de gráfico de controle variando o intervalo de tempo em que uma amostra é coletada. Mais tarde surgiu um grande número de trabalhos com o propósito de variar os demais parâmetros do gráfico de controle, ficando comprovado que esta técnica, em geral, aumenta o poder do gráfico na detecção de causas especiais que modificam a média da característica de qualidade (variável) que se deseja monitorar (BAI e LEE, 1998; PARK e REYNOLDS, 1994, 1999; MAGALHÃES e EPPRECHT, 2001).

O gráfico de controle de $\bar{X} - VSSI$ é adaptativo no que se refere ao tamanho da amostra e intervalo de tempo em que uma amostra é coletada. Este gráfico foi utilizado por Prabhu *et al.* (1994, 1997), Costa (1997) e Park e Reynolds (1999) para monitorar a estatística \bar{X} de um processo.

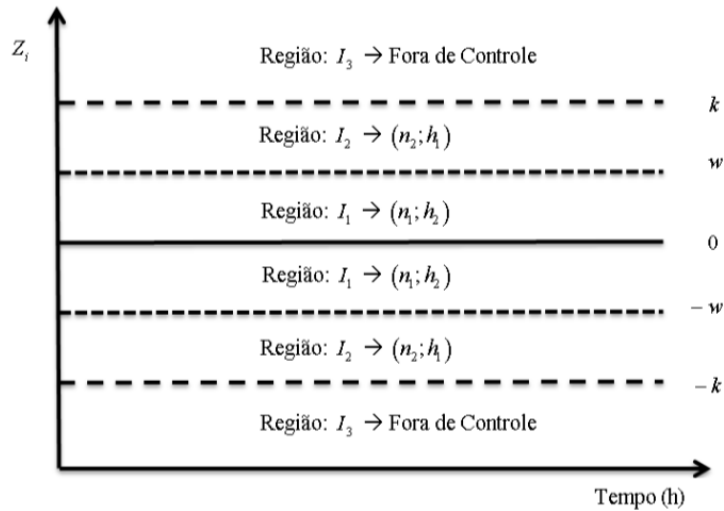


Figura 1. Regiões de controle de um gráfico com tamanho da amostra e intervalo variáveis

Em um gráfico de controle com tamanho da amostra e intervalo variáveis (ver Figura 1) o tamanho da amostra e o intervalo de tempo em que uma amostra é coletada podem variar de acordo com a informação fornecida pela amostra mais recente coletada. Neste tipo de gráfico, amostras aleatórias de tamanhos diferentes são coletadas em intervalos de comprimento variável de acordo com a função:

$$(n(i), h(i)) = \begin{cases} (n_2, h_1) & \text{se } w < Z_{i-1} < k \\ (n_1, h_2) & \text{se } -w < Z_{i-1} < w \\ (n_2, h_1) & \text{se } -k < Z_{i-1} < -w \end{cases} \quad (1)$$

onde $i=1,2,\dots$, é o número da amostra; $n(i)$ é o tamanho da i -ésima amostra ($n(i) = n_1 < n(i) = n_2$); $h(i)$ é o tempo praticado para retirar a i -ésima amostra

$(h(i) = h_1 > h(i) = h_2)$; k e w são limites que definem regiões de controle; Z_i é a estatística de controle.

$$Z_i = (\bar{x}_i - \mu_0) \cdot \left(\sigma_0 / \sqrt{n(i)} \right)^{-1} \quad (2)$$

onde \bar{x}_i é a média amostral do i -ésimo subgrupo; μ_0 e σ_0 são a média e o desvio padrão do processo quando em controle.

A escolha entre os pares $(n(i), t(i))$ depende da posição do último ponto (Z_{i-1}) marcado no gráfico. Para um gráfico de $\bar{X} - VSSI$, podemos dividir a região de controle em três regiões mutuamente exclusivas e exaustivas, como segue (ver Figura 1):

- Região dentro dos limites de alarme: $I_1 = [-w, w]$.
- Região entre os limites de alarme e controle: $I_2 = [-k, -w) \cup (w, k]$.
- Região fora dos limites de controle: $I_3 = [-\infty, -k) \cup (k, \infty]$.

Se a estatística Z_i for marcada dentro da região $I_1 = [-w, w]$, o controle (ou inspeção) é relaxado utilizando o par (n_1, h_2) , caso contrário, se o ponto atual Z_i se situar dentro da região $I_2 = [-k, -w) \cup (w, k]$, o controle será mais rigoroso utilizando o par (n_2, h_1) .

3. Desempenho do Gráfico de $\bar{X} - VSSI$

O desempenho estatístico de um gráfico de controle pode ser avaliado calculando as estatísticas ARL ou ATS. Dependendo da condição de operação do processo, tem-se o ARL quando o processo está em controle (ARL_0), ou seja, o número esperado de amostras entre dois sucessivos alarmes falsos e o ARL para processo fora de controle (ARL_δ), que representa o número esperado de amostras entre a ocorrência da causa especial que altera o parâmetro monitorado e o sinal desencadeado pelo gráfico. O símbolo δ representa o grau de

deslocamento ocorrido na média do processo e pode ser calculado pela expressão:

$\delta = (\mu_1 - \mu_0) / \sigma_0$, em que μ_1 representa o novo patamar da média após o processo se

desajustar (ver Costa *et al.*, 2008). De maneira similar, tem-se o ATS quando o processo está

em controle (ATS_0), representando o tempo médio entre dois sucessivos alarmes falsos e o

ATS para processo fora de controle (ATS_δ), representando o tempo esperado entre a

ocorrência da causa especial e o sinal desencadeado pelo gráfico.

3.1 Cadeias de Markov para o gráfico de $\bar{X} - VSSI$

É possível calcular as estatísticas ARL e ATS utilizando cadeias de Markov. Observa-se o

número esperado de transições antes de a estatística monitorada se situar no estado absorvente

da cadeia. A cadeia de Markov proposta em Zimmer *et al.* (2000) foi utilizada neste artigo

para avaliar o ARL em controle e fora de controle, ARL_0 e ARL_δ respectivamente. Cada

probabilidade de transição é calculada como a probabilidade de a estatística se situar dentro

de uma das regiões do intervalo de controle (I_1, I_2 ou I_3). Nesta cadeia, existem dois estados

transientes e um estado absorvente que corresponde ao processo fora de controle.

A matriz de transição de estados da cadeia que representa o funcionamento do

processo em controle (P_0) pode ser dividida em quatro submatrizes:

$$P_0 = \begin{bmatrix} Q_0 & R_0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde Q_0 é a matriz de transição entre estados transientes; R_0 representa a matriz de transição

de estados transientes ao estado absorvente; 0 é a matriz que afirma a impossibilidade de ir

de um estado absorvente para um estado transiente e I é a matriz identidade.

Em uma cadeia de Markov, o elemento (i,j) da matriz $[I - Q_0]^{-1}$ representa o número médio de visitas ao estado transiente j antes de chegar ao estado absorvente, dado que o processo começou no estado i . Cada probabilidade de transição em controle é calculada como a probabilidade de um ponto de a estatística monitorada se situar dentro de uma das regiões do intervalo de controle. Portanto, o ARL_0 é calculado por:

$$ARL_0 = \{b\}^T [I - Q_0]^{-1} \{1\} \quad (4)$$

onde $\{b\}^T$ é um vetor com probabilidades iniciais; I é a matriz identidade; $\{1\}$ é um vetor unitário e Q_0 é uma matriz de transição.

$$Q_0 = \begin{bmatrix} \Phi(w) - \Phi(-w) & 2[\Phi(k) - \Phi(w)] \\ \Phi(w) - \Phi(-w) & 2[\Phi(k) - \Phi(w)] \end{bmatrix} \quad (5)$$

onde $\Phi(\cdot)$ denota a função cumulativa normal padrão; k e w são os limites que definem a região de controle do gráfico.

O tempo médio para o gráfico produzir um alarme falso é:

$$ATS_0 = \{b\}^T [I - Q_0]^{-1} \{h\} \quad (6)$$

onde $\{h\}$ é um vetor com os intervalos de amostragem.

A matriz de transição do processo operando fora de controle é dada por:

$$P_\delta = \begin{bmatrix} Q_\delta & R_\delta \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (7)$$

A fim de calcular as medidas de desempenho ARL_δ e ATS_δ , utilizam-se:

$$ARL_{\delta} = \{b\}^T [I - Q_{\delta}]^{-1} \{1\} \quad (8)$$

e

$$ATS_{\delta} = \{b\}^T [I - Q_{\delta}]^{-1} \{h\} \quad (9)$$

sendo a matriz de transição dada por:

$$Q_{\delta} = \begin{bmatrix} Q_{\delta 11} & Q_{\delta 12} \\ Q_{\delta 21} & Q_{\delta 22} \end{bmatrix} \quad (10)$$

onde:

$$Q_{\delta 11} = \Phi(w - \delta\sqrt{n_1}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{n_1});$$

$$Q_{\delta 21} = \Phi(w - \delta\sqrt{n_2}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{n_2});$$

$$Q_{\delta 12} = [\Phi(k - \delta\sqrt{n_1}) - \Phi(w - \delta\sqrt{n_1})] + [\Phi(-k - \delta\sqrt{n_1}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{n_1})];$$

$$Q_{\delta 22} = [\Phi(k - \delta\sqrt{n_2}) - \Phi(w - \delta\sqrt{n_2})] + [\Phi(-k - \delta\sqrt{n_2}) - \Phi(-w - \delta\sqrt{n_2})].$$

O vetor com probabilidades iniciais $\{b\}^T$ é definido de acordo com as condições iniciais de operação no processo:

$$\{b\}^T = \left\{ \frac{\Phi(w) - \Phi(-w)}{\Phi(k) - \Phi(-k)} \quad \frac{2[\Phi(k) - \Phi(w)]}{\Phi(k) - \Phi(-k)} \right\} \quad (11)$$

Neste artigo, considera-se a condição conhecida como *Steady-State*, ou seja, assume-se que o processo inicia em controle e, em algum instante futuro, ocorre uma causa especial que provoca um deslocamento no valor alvo da estatística monitorada.

3.2 *Projeto estatístico ótimo para o gráfico de $\bar{X} - VSSI$*

O planejamento de um gráfico de controle pode ser formalizado como um problema de otimização em que as variáveis de decisão são os parâmetros do gráfico. A Figura 2 ilustra a função objetivo e as restrições que definem o melhor conjunto de parâmetros do gráfico de $\bar{X} - VSSI$.

Função Objetivo:

$$\min ATS(n_1, n_2, h_1, h_2, w, k | \delta)$$

Sujeito a:

$$ATS(n_1, n_2, h_1, h_2, w, k | \delta = 0) = ATS_0;$$

$$E(n) = n_0;$$

$$E(h) = h_0;$$

$$0 < w < k;$$

$$h_{\min} \leq h_1 \leq h_2 \leq h_{\max};$$

$$n_{\min} \leq n_1 \leq n_2 \leq h_1 \cdot r_{insp}$$

Figura 2. Função objetivo e restrições para os parâmetros do gráfico de controle de $\bar{X} - VSSI$

Na Figura 2, n_1 e n_2 são os tamanhos das amostras; h_1 e h_2 são os intervalos de tempos entre coleta das amostras; w e k são limites de controle do gráfico; δ é o grau de deslocamento ocorrido na média do processo; ATS_0 é o tempo médio entre dois sucessivos alarmes falsos; n_0 é o valor esperado do tamanho da amostra coletada com o processo em controle; h_0 é o tempo esperado para coletar uma amostra com o processo em controle e r_{insp} é a quantidade de partes (uma peça, um componente e etc.) que se pode inspecionar por unidade de tempo considerado em h_0 .

Para ilustrar que o problema de otimização se reduz a encontrar o par (n_1, n_2) que minimiza a função objetivo, considere, sem perda de generalidade, que $E(h) = h_0 = 1$ unidade

de tempo (por exemplo: 1 hora, 0,5 hora e etc.) e $ARL_0=370,4$. Logo, $ATS_0=ARL_0=370,4$ e $k=3$.

O valor esperado do tamanho da amostra com o processo em controle, $E(n) = n_0$, é dado por:

$$E(n) = n_0 = \frac{\Phi(w) - \Phi(-w)}{\Phi(k) - \Phi(-k)} n_1 + \frac{2[\Phi(k) - \Phi(w)]}{\Phi(k) - \Phi(-k)} n_2 \quad (12)$$

Um par de amostras (n_1, n_2) é selecionado; uma vez que (n_1, n_2) , n_0 e k são conhecidos, pode-se inferir w diretamente da expressão (12).

O intervalo de amostragem ideal mais curto (h_1) é:

$$h_1 = \frac{n_2}{r_{insp}} \quad (13)$$

onde r_{insp} é a quantidade de partes (uma peça, um componente e etc.) que se pode inspecionar por unidade de tempo considerado em $E(h) = h_0$. Por exemplo, se $r_{insp} = 60$ dado que $h_0 = 1$ hora, admite-se que seja possível inspecionar 60 partes a cada hora. Para maiores detalhes veja Celano (2009, 2011).

Uma vez definidos h_0 , h_1 , w e k , obtêm-se h_2 através do tempo esperado para coletar uma amostra:

$$E(h) = h_0 = \frac{\Phi(w) - \Phi(-w)}{\Phi(k) - \Phi(-k)} h_1 + \frac{2[\Phi(k) - \Phi(w)]}{\Phi(k) - \Phi(-k)} h_2 \quad (14)$$

O problema de otimização se reduz, finalmente, a encontrar o par (n_1, n_2) que minimiza a função objetivo.

Na seção 4, apresenta-se um exemplo de aplicação em que revelamos quais valores para o par (n_1, n_2) devem ser utilizados. Para isso, utilizou-se o *software R* (*R DEVELOPMENT CORE TEAM*, 2011) como ferramenta para calcular os parâmetros ótimos de um gráfico de $\bar{X} - VSSI$.

4. Exemplo

Nesta seção, propõem-se duas funções (ver Apêndice) desenvolvidas para uso no *software R* que avaliam o desempenho do gráfico de controle de $\bar{X} - VSSI$ e resolvem o problema de otimização apresentado na Figura 2.

A primeira função, denominada *VSSI*, avalia o desempenho do gráfico de controle calculando o ATS_δ quando fornecidos pelo usuário: $n_1, n_2, n_0, \text{delta}(\delta), h_0$ e r_insp .

A segunda função, *VSSI.otimo*, resolve o problema de otimização apresentado na Figura 2. Esta função requer como entrada: $n_0, \text{delta}(\delta), h_0, r_insp$ e um valor para n_{max} que se refere ao maior tamanho de amostra admissível para coleta.

Para ilustrar o uso das funções, considere o exemplo apresentado em Costa *et al.* (2008). Uma linha de empacotamento de leite apresenta valor médio de 1000 ml e desvio padrão estimado em 4,32 ml. É realizado o monitormanto da média do processo inspecionando-se amostras de tamanho $n_0 = 5$ a cada unidade de tempo. Suponha que essa unidade seja igual a $h_0=60$ minutos. Nesse exemplo, os parâmetros planejados para o gráfico de controle são fixos, ou seja, o tamanho da amostra, o intervalo de amostragem e os limites não se alteram depois de estimados. Para usar o gráfico de controle de $\bar{X} - VSSI$ é necessário calcular os limites de controle (w e k) e o esquema de amostragem (n_1, h_2) e (n_2, h_1) .

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Escolhendo, por exemplo, $n_1 = 2; n_2 = 8; n_0 = 5; \delta = 1,0; ARL_0 = 370,3983; h_0 = 60$ e $r_{insp} = 60$, a função *VSSI* nos fornece os parâmetros apresentados na Figura 3.

```

> VSSI(n1=2,n2=8,n0_FSR=5,delta=1,ARL0=370.3983,h0=60,r_insp=60)
  ATSD      n1      n2      h1      h2      delta
93.5959  2.0000  8.0000  8.0000 112.0000  1.0000
  ATSO      ARLO      k      w      n0      h0      r_insp
22223.8980 370.3983  3.0000  0.6724  5.0000  60.0000  60.0000
    
```

Figura 3. Parâmetros obtidos com a função *VSSI*($n_1=2, n_2=8, n_0_FSR=5, \delta=1, ARL_0=370,3983, h_0=60, r_{insp}=60$). Nota: h_0 deve ser lançado em minutos

Nesse exemplo, $\delta = 1,0$ significa que a média do processo passou de $\mu_0 = 1000$ (em controle) para $\mu_1 = \mu_0 + \delta \cdot \sigma_0 = 1000 + 1,4,32 = 1004,32$ (fora de controle).

Considere o caso em que $\delta = 2,0$. A Figura 4 ilustra os resultados obtidos com a função *VSSI*. Observa-se que o *ATS* é inferior ($ATS_{\delta=2} < ATS_{\delta=1}$), pois, quando ocorrem grandes desvios na média do processo, o desempenho do gráfico é melhor.

```

> VSSI(n1=2,n2=8,n0_FSR=5,delta=2,ARL0=370.3983,h0=60,r_insp=60)
  ATSD      n1      n2      h1      h2      delta
63.1409  2.0000  8.0000  8.0000 112.0000  2.0000
  ATSO      ARLO      k      w      n0      h0      r_insp
22223.8980 370.3983  3.0000  0.6724  5.0000  60.0000  60.0000
    
```

Figura 4. Parâmetros obtidos com a função *VSSI*($n_1=2, n_2=8, n_0_FSR=5, \delta=2, ARL_0=370,3983, h_0=60, r_{insp}=60$)

Contudo, um esquema ótimo para monitorar este processo é o que apresenta melhor desempenho, ou seja, o menor ATS_{δ} . Através da função *VSSI.otimo*, pode-se obter os parâmetros que minimizam o ATS_{δ} . A Figura 5 apresenta os melhores esquemas para os casos apresentados nas Figuras 3 e 4.

```

> VSSI.otimo(n0_FSR=5,delta=1,ARL0=370.3983,h0=60,r_insp=60,nmax=40)
  ATSD      n1      n2      h1      h2      delta      ATSO      ARL0      k      w      n0      h0      r_insp
91.5370  3.0000  7.0000  7.0000 113.0000  1.0000 22223.8980  370.3983  3.0000  0.6724  5.0000  60.0000  60.0000
> VSSI.otimo(n0_FSR=5,delta=2,ARL0=370.3983,h0=60,r_insp=60,nmax=40)
  ATSD      n1      n2      h1      h2      delta      ATSO      ARL0      k      w      n0      h0      r_insp
60.6035  4.0000  6.0000  6.0000 114.0000  2.0000 22223.8980  370.3983  3.0000  0.6724  5.0000  60.0000  60.0000
    
```

Figura 5. Parâmetros obtidos com a função VSSI.otimo(n0_FSR, delta, ARL0, h0, r_insp, nmax)

Nesse caso, o usuário que deseja controlar o valor médio de um processo considerando a possibilidade de um dos deslocamentos aqui apresentados, basta construir o gráfico de controle de $\bar{X} - VSSI$ com os parâmetros apresentados na Figura 5. Outros gráficos de $\bar{X} - VSSI$ podem ser construídos facilmente, modificando os valores de entrada das funções *VSSI* e *VSSI.otimo*.

5. Conclusões

Apresentou-se, neste artigo, como se avalia o desempenho do gráfico de controle de $\bar{X} - VSSI$ através de cadeias de Markov e, principalmente, como obter os parâmetros que minimizam o ATS. Para isso, duas funções escritas na linguagem para ambiente *R* foram criadas com a finalidade de minimizar o ATS e apresentar os melhores parâmetros a serem usados na construção do gráfico de controle de $\bar{X} - VSSI$. Esquemas adaptativos são reconhecidamente mais eficientes que os esquemas de gráficos de controle com parâmetros fixos. Contudo, o uso de esquemas adaptativos para gráficos de controle não são comuns na prática, pois os softwares estatísticos tradicionais não apresentam rotinas para esses tipos de gráficos. Dessa forma, com os programas aqui apresentados, o usuário dispõe de uma ferramenta em que é possível planejar o uso do gráfico de controle de $\bar{X} - VSSI$ para monitorar o valor médio de uma característica de qualidade desejada.

Sugere-se que futuros trabalhos apresentem, com apoio do software R, como planejar projetos estatísticos para gráficos de controle com esquemas adaptativos para outras estatísticas, tais como: o desvio padrão e a amplitude amostral.

Referências

- Bai, D. S. & Lee, K. T. (1998). An economic design of variable sampling interval \bar{X} control chart. *International journal of production economics*, 54, 57- 64.
- Celano, G. (2009). Robust design of adaptive control charts for manual manufacturing / inspection workstations. *Journal of Applied Statistics*, 36(2), 181-203.
- Celano, G. (2011). On the constrained economic design of control charts: a literature review. *Produção*, 21(2), 223-234.
- Costa, A.F.B. (1994). \bar{X} charts with variable sample size, *Journal of Quality Technology*, 26, 155-163.
- Costa, A.F.B. (1997). \bar{X} charts with variable sample size and sampling intervals. *Journal of Quality Technology*, 29, 197-204.
- Costa, A.F.B. (1999). \bar{X} charts with variable parameters, *Journal of Quality Technology*, 31, 408-416.
- Costa, A.F.B.; Epprecht, E.K. & Carpinetti, L.C.R. (2008). *Controle Estatístico de Qualidade*. São Paulo. Atlas.
- Faraz, A. & Saniga, E. (2011). A unification and some corrections to Markov chain approaches to develop variable ratio sampling scheme control charts. *Statistical Papers*, 52(4), 799-811.
- Leoni, R.C. & Costa, A.F.B. (2012). O ambiente R como proposta de apoio ao ensino no monitoramento de processos. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, 4(1), 83-96.
- Magalhães, M.S.; Epprecht, E.K. & Costa, A.F.B. (2001). Economic design of a $V_p \bar{X}$ chart. *International Journal of Production Economics*, 74, 191-200.
- Park, C. & Reynolds, M. R. Jr. (1994). Economic design of a variable sample size X chart. *Communications in statistics – simulation and computation*, 23, 467- 483.
- Park, C. & Reynolds, M.R.Jr. (1999). Economic design of a variable sampling rate \bar{X} chart. *Journal of Quality Technology*, 31, 427-443.
- Prabhu, S.S., Montgomery, D.C. & Runger G.C. (1994). A combined adaptive sample size and sampling interval \bar{X} control scheme. *Journal of Quality Technology*, 26, 164-176.
- Prabhu, S.S., Montgomery, D.C. & Runger G.C. (1997). Economic-statistical design of an adaptive \bar{X} chart. *International Journal of Production Economics*, 49, 1-15.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

R Development Core Team (2011). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.

Reynolds, M.R.Jr.; Arnold, J.C. & Nachlas, J.A. (1988). \bar{X} charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 30, 181-192.

Shewhart, W. A. Economic control of quality of manufactured product. 1^a Ed. New York: D. Van Nostrand Company. 1931.

Zimmer, L.S.; Montgomery, D.C. & Runger, G.C. (2000). Guidelines for the application of adaptive control charting schemes. *International Journal of Production Research*, 38(9), 1977-1992.

APÊNDICE – Código fonte para avaliar o desempenho e escolher um projeto estatístico ótimo para o gráfico de controle de \bar{X} - VSSI no ambiente R.

Apresentam-se, a seguir, duas funções denominadas *VSSI* e *VSSI.otimo*. Para usá-las, basta copiá-las no ambiente R e seguir o exemplo de aplicação.

```
# Função: VSSI
# função que avalia o desempenho do gráfico de  $\bar{X}$  - VSSI através da cadeia de Markov

rm(list=ls(all=TRUE))
VSSI <- function(n1,n2,n0_FSR,delta,ARL0,h0,r_insp) {
k0 <- qnorm(1-(1/(2*ARL0)))
tempo <- h0
h0 <- 1
b_vector <- matrix(c(1,0), nrow=1, ncol=2) #vetor {b}
fi_k0 <- pnorm(k0)
w0<- qnorm((fi_k0*(n2-n0_FSR)/(n2-n1)+0.5*(n0_FSR-n1)/(n2-n1)))
h1 <- n2/r_insp
h2 <- h0*(pnorm(k0)-pnorm(-k0))/(pnorm(w0)-pnorm(-w0))-h1*(2*(pnorm(k0)-pnorm(w0))/(pnorm(w0)-pnorm(-w0))
# Em controle - Probabilidades de Transição
p0_o_o <- pnorm(w0)-pnorm(-w0)
p0_o_ab <- 2*(pnorm(k0)-pnorm(w0))
p0_ab_o <- p0_o_o
p0_ab_ab <- p0_o_ab
# probabilidades estado estacionário
p1 <- p0_ab_o/(p0_o_ab+p0_ab_o)
p2 <- p0_o_ab/(p0_o_ab+p0_ab_o)
# Matriz de transição
P <- matrix(c(p0_o_o, p0_o_ab, 1-p0_o_o-p0_o_ab, p0_ab_o, p0_ab_ab, 1-p0_ab_o-p0_ab_ab, 0, 0, 1), nrow
= 3, ncol=3, byrow=TRUE, dimnames = list(c("O", "A or B", "OOC"), c("O", "A or B", "OOC")))
# matriz fundamental de Markov
Qo <- matrix(c(p0_o_o, p0_o_ab, p0_ab_o, p0_ab_ab), nrow=2, ncol=2, byrow=TRUE,
dimnames = list(c("O", "A or B"), c("O", "A or B")))
Id <- matrix(c(1,0,0,1), nrow=2, ncol=2, byrow=TRUE)
# vetor unitário
one <- matrix(c(1,1), nrow=2, ncol=1)
# [(I-Qo)^-1]
Id_Qo <- solve (Id-Qo)
# vetor {n}
n_vector <- matrix(c(n1,n2), nrow=2, ncol=1)
#Fora de controle - Probabilidades de Transição
pd_o_o <- pnorm(w0-delta*sqrt(n1))-pnorm(-w0-delta*sqrt(n1))
pd_o_ab <- pnorm(k0-delta*sqrt(n1))-pnorm(w0-delta*sqrt(n1))+pnorm(-w0-delta*sqrt(n1))-pnorm(-k0-
delta*sqrt(n1))
pd_ab_o <- pnorm(w0-delta*sqrt(n2))-pnorm(-w0-delta*sqrt(n2))
pd_ab_ab <- pnorm(k0-delta*sqrt(n2))-pnorm(w0-delta*sqrt(n2))+pnorm(-w0-delta*sqrt(n2))-pnorm(-k0-
delta*sqrt(n2))
#matriz de transição de estados
Pd <- matrix(c(pd_o_o, pd_o_ab, 1-pd_o_o-pd_o_ab, pd_ab_o, pd_ab_ab, 1-pd_ab_o-pd_ab_ab, 0, 0, 1),
nrow = 3, ncol=3, byrow=TRUE,
dimnames = list(c("O", "A or B", "OOC"), c("O", "A or B", "OOC")))
# matriz fundamental de Markov
Qd <- matrix(c(pd_o_o, pd_o_ab, pd_ab_o, pd_ab_ab), nrow=2, ncol=2, byrow=TRUE,
```


APÊNDICE – Código fonte para avaliar o desempenho e escolher um projeto estatístico ótimo para o gráfico de controle de \bar{X} - VSSI no ambiente R (Continuação).

```

dimnames = list(c("O", "A or B"), c("O", "A or B"))
Id_Qd <- solve(Id-Qd) # [(I-Qd)^-1]
h_vector <- matrix(c(h2,h1), nrow=2, ncol=1) # vetor {h}
p1 <- (pnorm(w0)-pnorm(-w0))/(pnorm(k0)-pnorm(-k0))
p2 <- (2*(pnorm(k0)-pnorm(w0)))/(pnorm(k0)-pnorm(-k0))
b_vector <- matrix(c(p1,p2), nrow=1, ncol=2) #vetor {b} SS
ATS <- b_vector %*% Id_Qd %*% h_vector #b*[(I-Q0)^-1]*h
#transformação para a unidade de tempo do usuário em minutos
h0 <- h0 * tempo; h1 <- h1 * tempo; h2 <- h2 * tempo; ATS <- ATS * tempo; ATS0 <- ARL0*h0
parametros <- c(ATS,n1,n2,h1,h2,delta,ATS0,ARL0,k0,w0,n0_FSR,h0,r_insp)
names(parametros) <- c("ATSd","n1","n2","h1","h2","delta","ATS0","ARL0","k","w","n0","h0","r_insp")
parametros <- round(parametros,4)
parametros}

```

```

# Exemplo de aplicação da função VSSI
# n1 - tamanho da amostra 1
# n2 - tamanho da amostra 2
# n0_FSR - valor esperado (médio) para o tamanho da amostra (processo em controle)
# delta - grau de deslocamento na média do processo
# ARL0 – o número esperado de amostras entre dois sucessivos alarmes falsos
# h0 – tempo esperado para coletar uma amostra (processo em controle).
NOTA: lançar o valor de ho em minutos.
# r_insp - quantidade de partes que se pode inspecionar por unidade de tempo considerado em h0.

VSSI(n1=2,n2=8,n0_FSR=5,delta=1,ARL0=370.3983,h0=60,r_insp=60)

```

```

# Função: VSSI.otimo
# função que escolhe os parâmetros ótimos do gráfico de  $\bar{X}$  - VSSI

VSSI.otimo <- function(n0_FSR,delta,ARL0,h0,r_insp,nmax){
LI=n0_FSR-1 ; LS=n0_FSR+1
n1opt=1 ; n2opt=2*n0_FSR-n1opt
ATSopt=VSSI(n1opt,n2opt,n0_FSR,delta,ARL0,h0,r_insp)[1]
for (n1 in 1:LI) {
for (n2 in LS:nmax) {
x1 <- 0.5*n1+0.5*n2
x2 <- n0_FSR
if (identical(all.equal(x1, x2), TRUE)) {
result <- VSSI(n1,n2,n0_FSR,delta,ARL0,h0,r_insp)[1]
if (result < ATSopt) {
n1opt=n1 ; n2opt=n2
ATSopt=as.numeric(VSSI(n1,n2,n0_FSR,delta,ARL0,h0,r_insp)[1]) } } } }
print(VSSI(n1opt,n2opt,n0_FSR,delta,ARL0,h0,r_insp)) }

```

```

# Exemplo de aplicação da função VSSI.otimo
# nmax – valor máximo admissível para o tamanho da amostra
# Nota: Esta função depende da anterior. Para usar a função VSSI.otimo copie também a função VSSI na área de trabalho do software R.

VSSI.otimo(n0_FSR=5,delta=1,ARL0=370.3983,h0=60,r_insp=60,nmax=40)

```