

O USO DE VARIÁVEIS TRANSFORMADAS NO CONTROLE ESTATÍSTICO DE PROCESSOS MULTIVARIADOS

Paulo Henrique Coelho Maranhão

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

maranhao@ime.eb.br

Eugenio Kahn Epprecht

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

eke@puc-rio.br

Resumo

Alguns autores mostraram que, quando alterações no vetor de médias de um processo multivariado ocorrem tipicamente em direções previsíveis, a estatística mais eficaz para o monitoramento do processo é o valor da projeção do vetor de observações (ou de médias amostrais) em cada uma dessas direções. Neste artigo apresentamos um exemplo de como perturbações independentes não diretamente observáveis podem produzir variações no vetor de variáveis observáveis em direções ortogonais. Também analisamos a eficácia da Análise de Componentes Principais (ACP) em reconhecer tais direções de variação; em particular, identificamos as condições em que a ACP reconhece-as e as condições em que não as reconhece. Finalmente, é apresentada uma comparação de desempenho entre diversos esquemas de controle: gráficos de controle em cada uma das variáveis observáveis, gráficos nos valores das projeções dessas variáveis nas direções conhecidas de variação, e gráficos nas componentes principais. A comparação é baseada nas probabilidades de alarme falso e de alarme verdadeiro, estimadas por simulação.

Palavras-chave: componentes principais; variáveis transformadas; direções de variação.

Abstract

Previous authors have shown that when the eventual shifts in the mean vector of a multivariate process typically occur in predictable directions, the most effective statistics for process monitoring are the values of the projections of the vector of observations (or sample averages) in each of these directions. In this paper, we show by an example how independent disturbances which are not directly observable may result in variations of the vector of observed variables in orthogonal directions. Additionally, we analyze the efficacy of Principal Component Analysis (PCA) in recognizing these directions of variation; in particular, we identify the conditions under which PCA does and does not perfectly recognize these directions. A performance comparison of different process control schemes — control charts on the individual observed variables, control charts on their projection on the (known) directions of variation, and control charts on the PCA's — is presented, based on the in-control and out-of-control probabilities of signal, estimated by simulation.

Keywords: principal components; transformed variables; directions of variation.

1. Introdução

Runger e Montgomery (1997) mostraram que em processos multivariados, no caso de perturbações no vetor de parâmetros do processo ocorrerem tipicamente em direções pré-conhecidas, a forma de controle mais eficaz, em termos de maior probabilidade em sinalizar, é usar gráficos de controle tendo como estatísticas as projeções do vetor de variáveis em cada uma dessas direções.

A utilização de técnicas de projeção nos problemas de Controle Estatístico de Processos (CEP), especialmente no que tange à Análise de Componentes Principais (ACP), não é uma novidade. Jackson (1980, 1981), em dois artigos, detalha a teoria da ACP e utiliza o gráfico T^2 nas componentes principais (CP's) obtidas das variáveis originais, com o objetivo de identificar causas especiais. Ainda com relação ao uso de componentes principais em CEP, Schall e Chandra (1987) propuseram um método baseado nas propriedades das componentes principais em conjunto com a análise de regressão multivariada no intuito de prever possíveis causas de variação. Mais recentemente, Souza e Rigão (2005) estudaram por meio de um exemplo o funcionamento de duas técnicas de identificação de variáveis fora de controle em processos produtivos multivariados, considerando dois casos: variáveis fracamente e fortemente relacionadas; Machado e Costa (2008) compararam o desempenho do gráfico T^2 baseado em componentes principais com os gráficos de controle univariados usados simultaneamente, tanto com base nas variáveis originais, bem como com base nas componentes principais; e Aparisi *et al.* (2010) desenvolveram um programa que otimiza, usando algoritmos genéticos, um conjunto de gráficos de \bar{X} (ou um conjunto de gráficos nas componentes principais do processo) e compara o seu desempenho com o de um gráfico T^2 baseado (respectivamente) nas variáveis originais (ou nas suas componentes principais).

Este trabalho considera processos em que haja fontes de variação intrínsecas, não diretamente observáveis, que resultem em variações do vetor de variáveis observáveis (diretamente mensuráveis) em direções específicas. A primeira questão que se pretende estudar é se, para esse tipo de processos, a aplicação da Análise de Componentes Principais (ACP) a um conjunto de dados históricos permite identificar essas direções de variação específicas. Em termos formais, pretende-se verificar se as Componentes Principais (CP's) coincidirão, a menos de um pequeno erro amostral, com essas direções específicas (que serão chamadas, daqui em diante, de “direções interpretáveis”, por corresponderem a fontes originais, intrínsecas, da variabilidade do processo). A análise dessa questão será realizada utilizando simulação e considerando um exemplo discutido por Gaio e Epprecht (2006) do controle estatístico de um processo referente à montagem de portas traseiras em automóveis.

Portanto, este trabalho tem dois objetivos principais. O primeiro é verificar se, na Fase I (estimação dos parâmetros e estabelecimento dos limites de controle) a ACP é capaz de identificar correta e univocamente as direções de variação interpretáveis. Este objetivo desdobra-se em outras questões, a saber:

- em que situações as CP's identificam ou não essas direções?
- se há uma gradação entre identificar ou não identificar, quais são os fatores que influenciam na eficácia da ACP em identificar essas direções?

O segundo objetivo principal é: nos casos em que a ACP não identifica de forma eficaz essas direções, comparar, em termos do número de sinalizações de descontroles no processo, o desempenho de dois esquemas de controle: um baseado nas componentes principais estimadas e outro, baseado na transformação das variáveis observadas, pela sua projeção nas direções de variação interpretáveis (neste caso, supostas conhecidas).

A análise dessas questões foi realizada por simulação, gerando-se dados em que as variações ocorrem em algumas direções definidas, aplicando a ACP para verificar se identifica essas direções (e que fatores influenciam sua eficácia nessa identificação), e, numa outra fase, introduzindo perturbações no processo e verificando a eficiência dos gráficos de controle baseados nas variáveis originais, nas variáveis transformadas e nas CP's.

O restante deste artigo está estruturado da seguinte forma: as duas próximas seções descrevem, respectivamente, a técnica de ACP como fundamento para a compreensão do que se seguirá e o exemplo que foi usado para a realização do estudo. A quarta seção apresenta a ideia da redefinição das variáveis inicialmente observadas e a quinta descreve como foram feitas as simulações. Por fim, os dois últimos tópicos mostram os resultados obtidos e as conclusões sobre o presente estudo.

2. Análise de Componentes Principais (ACP)

De acordo com Johnson e Wichern (2002) e Mingoti (2005) esta técnica tem como objetivo a explicação da estrutura de variância e covariância de um vetor aleatório por meio de combinações lineares das variáveis envolvidas no processo. Estas combinações são chamadas de Componentes Principais (CP) e são não correlacionadas e, além disso, geometricamente representam um novo sistema de coordenadas obtido pela rotação do sistema formado pelas variáveis originais. Sendo assim, esse novo sistema representa a direção com máxima variabilidade produzindo uma descrição mais simples da estrutura de covariância.

Seja y_i a i -ésima componente principal de uma matriz C obtida pela transformação do vetor $\mathbf{x}' = [x_1, x_2, \dots, x_p]$ por

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{e}_i' \mathbf{x} \quad (1)$$

onde \mathbf{e}_i , $i=1, 2, \dots, p$, são os autovetores de C . Além disso, se C é uma matriz simétrica, seus autovetores associados aos seus respectivos autovalores são ortogonais. Assim, as componentes principais $[y_1, y_2, \dots, y_p]$ também serão ortogonais. Assim, cada componente principal em (1) tem variância dada pelo autovalor correspondente, isto é,

$$\text{Variância}(\mathbf{y}_i) = \mathbf{e}_i' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{e}_i = \lambda_i \quad (2)$$

onde $\boldsymbol{\Sigma}$ é a matriz de covariância associada ao vetor aleatório $\mathbf{x}' = [x_1, x_2, \dots, x_p]$. Dessa forma, pode-se dizer que a ACP transforma a informação contida em p variáveis correlacionadas em p componentes principais independentes.

Ainda, a variância total da população é dada pelo traço de $\boldsymbol{\Sigma}$, que pode ser obtido facilmente, simplesmente decompondo a matriz de covariância em função dos autovalores e autovetores. Então,

$$\text{Variância total da população} = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \dots + \sigma_{pp}^2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p \quad (3)$$

Consequentemente, a proporção da variância total devido a i -ésima CP é dada por:

$$\frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (4)$$

Assim, se a maior parte de (3) é atribuída a primeira, segunda ou a k -ésima componente, então essas k componentes podem substituir as p variáveis originais sem muita perda de informação. Para saber mais sobre os critérios de escolha das k componentes ver Johnson e Wichern (2002).

3. Exemplo

Considere o processo descrito em Gaio e Epprecht (2006), da montagem de portas traseiras em automóveis, em que as peças podem apresentar problemas no ajuste com a carroceria. Dessa forma, a característica de interesse é o ajuste geométrico entre as peças externas, isto é, as variáveis observadas são as folgas entre as partes em diversos pontos ao redor da referida porta, que constituem um vetor de variáveis aleatórias correlacionados entre si. Para efeito de simplificação, serão considerados apenas quatro pontos, distribuídos conforme a figura 1 apresentada a seguir.

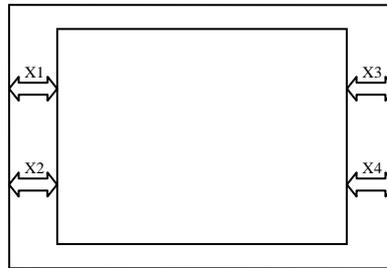


Figura 1: representação de quatro possíveis pontos de folgas do problema.

onde x_i , $i=1, 2, 3, 4$, são as variáveis observadas (medidas) e representam a folga em cada ponto específico, isto é, a folga proveniente do encaixe da peça na carroceria. Por conveniência, trabalhar-se-á com as folgas centradas, i.e., com as diferenças entre o valor da folga e seu valor médio (supostamente igual ao valor-alvo se o processo estiver em controle). Em consequência, $E(x_i) = 0$, $i=1, 2, 3, 4$.

4. Redefinindo as Variáveis Iniciais

A suposição básica deste trabalho é que perturbações ou variações ocorridas nas variáveis originais (observadas) são efeito de outras perturbações, ou variações, interpretáveis. Assim, considerando o exemplo dado, é possível pensar que os possíveis problemas no ajuste da peça possam ser explicados por rotações ou deslocamentos da peça, ou ainda por uma contração ou dilatação após o estágio de pintura (que se dá a altas temperaturas, em uma estufa), que poderiam ser entendidas como direções de variação – ou mesmo como as próprias variações essenciais – não observadas ou medidas diretamente, mas que provocam um conjunto de alterações correlacionadas nas variáveis (folgas) medidas. Dessa maneira, tais direções de variação é que são interpretáveis e correspondem cada uma, a uma causa especial, por exemplo: Rotação (T), Deslocamento (D) ou Contração/Dilatação (C).

Além disso, uma Rotação, um Deslocamento ou mesmo uma Contração/Dilatação alteram as variáveis iniciais de maneira correlacionada, isto é, em certas direções específicas. Por exemplo, uma Rotação no sentido anti-horário em torno do centro de gravidade da peça provoca desvios das variáveis x_i em relação às suas médias; especificamente, uma redução de uma mesma magnitude, digamos d unidades, em x_1 e x_4 e um aumento de d unidades em x_2 e x_3 . Trata-se, portanto, de uma alteração (deslocamento) do vetor \mathbf{x} na direção do vetor

$(-1 \ 1 \ 1 \ -1)'$. Já um Deslocamento de magnitude d para direita provoca um aumento de d unidades em x_1 e x_2 e uma redução de d unidades em x_3 e x_4 .

Definidas as direções de variação, será suposto que os valores das variações nessas direções são variáveis aleatórias que seguem cada uma delas uma distribuição de probabilidade. Por hipótese, considera-se que, se o processo estiver sob controle, essas variáveis seguem uma distribuição Normal com média zero e variância constante. Dessa forma, as direções de variação podem ser definidas da seguinte maneira:

- Deslocamento: $D \sim N(0, \sigma_d^2)$
- Rotação: $T \sim N(0, \sigma_t^2)$
- Contração ou Dilatação: $C \sim N(0, \sigma_c^2)$

Note que nesse caso, $C > 0$ implica em uma contração e $C < 0$ implica em uma dilatação. Assim, considerando inicialmente, com toda generalidade, que houve um Deslocamento, uma Rotação e uma Contração nas folgas, o seguinte modelo pode ser adotado para representar as variáveis observadas (folgas centradas):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 + D - T + C + e_1 \\ x_2 &= 0 + D + T + C + e_2 \\ x_3 &= 0 - D + T + C + e_3 \\ x_4 &= 0 - D - T + C + e_4 \end{aligned} \quad (5)$$

onde e_1, e_2, e_3 e e_4 são ruídos aleatórios, que supomos aqui independentes e identicamente distribuídos com distribuição Normal com média zero e variância σ_e^2 . Supomos ainda que as variáveis D, T, C e os ruídos e_i são independentes entre si. Note que D, T e C terão cada um, sinal positivo ou negativo, em função do seu sentido. Os zeros correspondem às médias das variáveis x_i se o processo estiver sob controle, pois estamos trabalhando com as folgas centradas (desvios em relação ao alvo) e supondo todas as variáveis aleatórias (D, T, C e e_i) com média zero. Se o processo estiver fora de controle, eventuais alterações nas médias das folgas centradas serão devidas a alterações na média de D, T e/ou C .

4.1 Utilizando as Variáveis Transformadas para o Monitoramento do Processo

Partindo do princípio que se conhece bem o processo produtivo que se deseja controlar e as direções de variação interpretáveis, podem-se definir transformações nas variáveis observadas que levem a estimativas das variações nas direções interpretáveis, para controlar estatisticamente essas variáveis transformadas em vez das variáveis medidas diretamente. Assim, pode-se definir, respectivamente a T, D e C :

$$\begin{aligned} T(x) &= (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)/4 \\ D(x) &= (+x_1 + x_2 - x_3 - x_4)/4 \\ C(x) &= (+x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4 \end{aligned} \quad (6)$$

Em notação matricial, $T(x) = \mathbf{a}'\mathbf{x}$, $D(x) = \mathbf{b}'\mathbf{x}$ e $C(x) = \mathbf{c}'\mathbf{x}$, onde $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}^T$ são vetores nas direções de variação interpretáveis (Rotação, Deslocamento e Contração/dilatação). Dessa forma, as variáveis transformadas são as projeções do vetor de variáveis observadas nessas

direções. Note ainda que as novas variáveis, $T(x)$, $D(x)$ e $C(x)$, são ortogonais. Além disso, substituindo (5) na expressão (6) para $T(x)$, pode-se chegar ao seguinte resultado:

$$T(x) = \frac{1}{4}(4T + \sum_{i=1}^4 e_i) = T + \frac{1}{4}(-e_1 + e_2 + e_3 - e_4) \quad (7)$$

pois os termos D e C se cancelam pelos sinais dos seus coeficientes em (5). Assim, $T(x)$ é uma medida ruidosa de T . Ainda, com base na equação (7) os valores da esperança (média) e da variância para $T(x)$ podem ser determinados. Assim,

$$E(T(x)) = \begin{cases} 0, & \text{se } E(T) = 0 & \text{(se o processo está em controle)} \\ \delta, & \text{se } E(T) = \delta & \text{(se houver uma alteração de } \delta \text{ na média de } T) \end{cases} \quad (8)$$

e

$$V(T(x)) = \sigma_T^2 + \frac{1}{4}\sigma_e^2 \Rightarrow DP(T(x)) = \sqrt{\sigma_T^2 + \frac{1}{4}\sigma_e^2} \quad (9)$$

onde $DP(T(x))$ denota o desvio-padrão de $T(x)$. Esses resultados são importantes, pois permitem estabelecer um gráfico de controle para $T(x)$.

Raciocínio análogo mostra que $D(x)$ e $C(x)$ são medidas ruidosas de D e C , com expressões análogas a (8) e (9), e evidentes, para suas médias e desvios-padrão.

Observe que o valor dos coeficientes (1/4) usados no modelo faz com que $E(T(x)) = E(T)$, mas pode-se utilizar qualquer outro valor, visto que isso corresponderia apenas a uma mudança de escala. Por exemplo, em vez de definir $T(x)$, $D(x)$ e $C(x)$ como em (6), poder-se-ia definir:

$$\begin{aligned} T(x) &= -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ D(x) &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ C(x) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned} \quad (10)$$

Obviamente, (8) e (9) seriam modificadas de acordo.

4.2 Utilizando a Análise de Componentes Principais para Determinar as Direções de Variação do Vetor de Variáveis Observadas

Relembrando, um dos objetivos deste estudo é investigar se a ACP é eficaz em identificar as direções de perturbação interpretáveis. Para isso deve-se considerar a definição de paralelismo entre dois vetores. Assim, dois vetores, digamos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_k)$, são paralelos, e portanto, têm mesma direção, se existe um número λ tal que $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$, ou de outra maneira, dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} são paralelos quando seus elementos são proporcionais, isto é,

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \dots = \frac{u_k}{v_k} = \lambda. \text{ Dessa forma, esse fato pode ser evidenciado observando no caso em}$$

estudo se o quociente entre cada coeficiente da CP e o coeficiente dado pela direção de variação tem o mesmo valor. Na prática, visto que as CP's devem ter norma igual a um e serem proporcionais ao vetor $(-1, 1, 1, -1)$, que são os coeficientes da direção de variação em função das variáveis iniciais, basta examinar se os coeficientes das CP's são aproximadamente iguais a $(-0,5, 0,5, 0,5, -0,5)$ ou $(0,5, -0,5, -0,5, 0,5)$. Observe-se que a coincidência com esses valores

jamais será perfeita, por causa do erro experimental; trata-se de examinar se os coeficientes coincidem a menos de uma pequena diferença.

Para verificar se a ACP identifica eficientemente as direções interpretáveis de variação, gerou-se aleatoriamente conjuntos de valores de D , T , C e e_i , combinando-os em seguida segundo o modelo (5) para simular dados históricos de medidas de folgas. A esses dados, então, foi aplicado a ACP, para verificar se os vetores de coeficientes das primeiras componentes são (dentro de uma boa aproximação) paralelos aos vetores de coeficientes **a**, **b** e **c**.

5. Simulação

Toda a análise foi realizada por meio de simulação. Especificamente, ela foi usada para: analisar o desempenho dos gráficos usando as variáveis transformadas no monitoramento do processo; verificar se, na Fase I, a ACP identifica eficientemente as direções interpretáveis de variação; e, nos casos em que ela não identifica, analisar o desempenho dos gráficos usando as CP's no monitoramento do processo. Assim, para a realização da simulação foi utilizado o programa computacional R, que é um *software* livre de código aberto. Para a geração dos dados foi usada a função **rnorm**, que gera uma quantidade determinada de valores pseudo-aleatórios seguindo uma distribuição Normal com os parâmetros desejados. Para a construção dos gráficos e limites de controle, foi usado o pacote **qcc** (*quality control chart*) encontrado no próprio programa.

Foram considerados na simulação os seguintes casos:

- Uma única direção de perturbação: Rotação;
- Duas direções de perturbação: Rotação e Deslocamento, com variâncias iguais;
- Duas direções de variação: Rotação e Deslocamento, onde a variância da Rotação é superior ao do Deslocamento;
- Três direções de variação: Rotação, Deslocamento e Contração, com variâncias iguais.

Para cada caso acima, foram inicialmente realizadas simulações para obtenção das direções de variação considerando que todas as direções seguiam uma distribuição normal com média zero e variância um (processo em controle). Em seguida, com os valores das direções de perturbação determinados por meio da simulação são obtidos os valores das variáveis iniciais segundo o modelo descrito em (5) levando em consideração três diferentes números (m) de observações iniciais do vetor \mathbf{x} , a saber: $m = 25$; 100 e 300 e três magnitudes do desvio-padrão do erro aleatório (σ_e): 0.1; 0.5 e 1.0.

Para verificar se, na Fase I do CEP, de estimação dos parâmetros do processo, a ACP identifica eficientemente as direções interpretáveis de variação, foi aplicado o procedimento descrito ao final da Subseção 4.2, sendo os valores de D , T e C gerados segundo a distribuição em controle dessas variáveis (com média nula).

Para analisar o desempenho dos gráficos de controle propostos na Fase II, de monitoramento do processo, foram usados para estabelecimento dos limites de controle as estimativas de parâmetros obtidas na Fase I com $m = 300$ observações iniciais. Foram adotados limites de 3-sigma, de modo que, com o processo em controle, é de esperar que tenhamos em média um alarme falso a cada 370.4 pontos, por gráfico. Além da análise do desempenho em controle dos gráficos, foram simuladas alterações na média de uma ou mais das variáveis

interpretáveis (T, D) para obter estimativas das probabilidades de sinalização. As corridas de simulação foram de 1000 observações.

Foram consideradas diversas relações entre os desvios padrão de T e D, bem como diversas magnitudes de alteração na média dessas variáveis. Os casos e resultados estão detalhados na seção seguinte.

6. Resultados

A seguir são apresentados os resultados obtidos por meio das simulações realizadas.

6.1. Uma única direção de perturbação

Considerando inicialmente que o processo está sob controle, o Quadro 1 mostra o resultado da aplicação da técnica de análise de componentes principais nas variáveis iniciais para $m=300$ observações iniciais do vetor \mathbf{x} . Observe que no caso de só haver uma direção de perturbação, no caso, a rotação, o modelo em (5) reduz-se a:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 - T + e_1 \\ x_2 &= 0 + T + e_2 \\ x_3 &= 0 + T + e_3 \\ x_4 &= 0 - T + e_4 \end{aligned}$$

Quadro 1: Resultado da Análise de Componentes Principais

Variáveis Iniciais	$\sigma_e = 0.1$				$\sigma_e = 0.5$				$\sigma_e = 1.0$			
	PC ₁	PC ₂	PC ₃	PC ₄	PC ₁	PC ₂	PC ₃	PC ₄	PC ₁	PC ₂	PC ₃	PC ₄
x_1	-0.50	0.26	-0.58	0.60	-0.50	0.57	-0.50	0.42	0.56	-0.22	-0.26	-0.75
x_2	0.50	-0.43	0.14	0.74	0.50	-0.43	-0.60	0.46	-0.49	0.05	0.64	-0.59
x_3	0.51	0.85	0.09	0.14	0.49	0.46	0.50	0.55	-0.47	0.53	-0.65	-0.28
x_4	-0.50	0.17	0.80	0.28	-0.51	-0.54	0.38	0.56	0.48	0.82	0.31	0.01
Desvio-padrão	2.03	0.103	0.095	0.091	2.05	0.521	0.491	0.476	2.19	1.09	1.00	0.94
% da variância Explicada	0.99	0.003	0.002	0.002	0.85	0.06	0.05	0.05	0.61	0.15	0.13	0.11

Nota-se que apesar de o Quadro 1 conter os valores de todos os coeficientes das componentes para cada desvio-padrão do erro aleatório, a primeira componente é responsável pela maior parte da variância total explicada, o que é esperado, visto que nesse caso específico, apenas uma direção de variação foi considerada.

Observando os coeficientes das primeiras CP's para cada desvio-padrão do erro aleatório, pode-se dizer que para uma única direção de perturbação, a técnica da ACP mostrou-se eficaz em identificar a direção de variação, ou seja, a direção do vetor \mathbf{x} obtida pela ACP coincide com a direção da rotação.

Para a análise de desempenho dos esquemas propostos será utilizado o número de alarmes como principal indicador, conforme mencionado anteriormente. Dessa forma, para o caso em questão, será observado o número de alarmes para o gráfico de cada variável inicial, para o gráfico referente à primeira CP e para o gráfico da variável transformada $T(x)$ (rotação). O número de alarmes observados nos gráficos estabelecidos para todas as combinações estipuladas é apresentado no Quadro 2.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Quadro 2: Número de Alarmes obtidos para apenas uma direção de variação

DIREÇÃO: ROTAÇÃO								
Fase I			Alarmes					
	Amostra (m)	σ_e	X_1	X_2	X_3	X_4	Tx	PC ₁
T ~ N(0,1)	25	0.1	0	0	0	0	0	0
		0.5	0	0	1	0	0	0
		1.0	0	0	0	0	0	0
	100	0.1	0	0	0	0	0	0
		0.5	1	0	0	0	0	0
		1.0	0	1	0	1	0	0
	300	0.1	2	2	2	2	2	2
		0.5	0	0	2	1	1	1
		1.0	0	0	0	2	0	0
Fase II			Alarmes					
T ~ N(0,1)	1000	0.1	5	5	4	5	5	5
		0.5	3	4	3	3	4	4
		1.0	0	2	0	2	1	1
T ~ N(1,1)	1000	0.1	20	23	15	19	20	19
		0.5	10	21	20	16	17	17
		1.0	4	9	5	8	12	12
T ~ N(2,1)	1000	0.1	144	145	135	150	140	135
		0.5	110	115	112	93	146	147
		1.0	43	55	62	42	72	69

X_i = gráfico de controle para cada variável inicial x_i ;
 Tx = gráfico de controle para a variável transformada T(x);
 PC_i = gráfico de controle para a i -ésima componente principal.

Dessa forma, analisando o Quadro 2, pode-se observar que:

- i. Para a Fase I, os resultados mostraram-se satisfatórios, pois o número de alarmes observados encontra-se dentro do esperado, isto é, aproximadamente um alarme a cada 370 pontos observados, por gráfico.
- ii. Na Fase II, verificou-se que ambos os métodos, ou seja, Tx e CP, conseguem detectar relativamente bem alterações sofridas na média da direção de deslocamento. Basta ver nas células marcadas em cinza que o resultado do número de alarmes é praticamente o mesmo para ambos casos. Percebeu-se também que, à medida que o σ_e aumenta, Tx e PC emitem mais sinais que os gráficos X_i 's, evidenciando maior poder na detecção.
- iii. Para esse caso específico, a CP se confunde com Tx, ou seja, geralmente as duas representações sinalizam exatamente nos mesmos pontos. Isso acontece porque, conforme visto no Quadro 1, a primeira componente coincide com a direção de deslocamento e além disso, considerando que as correlações entre as variáveis iniciais são todas altas (ver Quadro 3), essas tendem a se comportar como uma só variável.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Outra informação relevante no que tange a formulação do problema refere-se ao grau de relação entre as variáveis iniciais, que, como poderá ser visto no Quadro 3, apresentam correlações altamente significativas, especialmente para σ_e pequeno.

Quadro 3: Correlações entre as variáveis iniciais para o processo em controle com $m=300$

	$\sigma_e = 0.1$				$\sigma_e = 0.5$				$\sigma_e = 1.0$			
	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
X ₁	1.00				1.00				1.00			
X ₂	-0.99	1.00			-0.81	1.00			-0.55	1.00		
X ₃	-0.99	0.99	1.00		-0.80	0.79	1.00		-0.52	0.46	1.00	
X ₄	0.99	-0.99	-0.99	1.00	0.80	-0.80	-0.81	1.00	0.48	-0.45	-0.40	1.00

6.2. Duas direções de perturbação com mesma variância

Seguindo procedimento de análise semelhante ao caso anterior, os quadros 4 e 5 apresentam respectivamente, o resultado da ACP e o número de alarmes considerando que duas direções de deslocamento atuem no problema. No caso de gráficos nas CP's, utilizam-se gráficos apenas nas componentes mais significativas, segundo a proporção de variância explicada.

Quadro 4: Resultado da Análise de Componentes Principais

Variáveis Iniciais	$\sigma_e = 0.1$		$\sigma_e = 0.5$		$\sigma_e = 1.0$	
	PC ₁	PC ₂	PC ₁	PC ₂	PC ₁	PC ₂
x ₁	-0.07	0.71	0.62	-0.34	0.26	-0.68
x ₂	-0.71	-0.07	-0.34	-0.63	-0.62	-0.30
x ₃	0.07	-0.70	-0.62	0.35	-0.24	0.64
x ₄	0.70	0.07	0.35	0.61	0.70	0.19
Desvio-padrão	2.07	1.82	2.24	2.06	2.33	2.14
% da Variância Explicada	0.56	0.436	0.51	0.435	0.45	0.38

Observa-se no Quadro 4 que, diferentemente do que ocorreu quando apenas uma direção de variação atuou no problema, quando duas direções com a mesma variância foram consideradas, estando o processo sob controle, as CP's não conseguiram identificar as direções de perturbação: os coeficientes das componentes não são proporcionais aos coeficientes das direções de perturbação consideradas, o que implica que as CP's e as direções de variação não são paralelas, e portanto, não têm a mesma direção. Uma provável explicação para isso é que, se as variâncias das duas perturbações em direções interpretáveis (T e D) são iguais, os eixos da elipse que representa os contornos de isoprobabilidade no plano definido por T e D possuem igual comprimento, assim, a elipse se degenera em um círculo, o que tem como consequência uma indeterminação das direções dos eixos principais. Embora as duas primeiras componentes principais identificadas pela ACP continuem contidas no mesmo plano, as suas direções neste plano tornam-se aleatórias: função dos valores particulares dos dados, dominadas pela aleatoriedade experimental.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Quadro 5: Número de alarmes obtidos para duas direções de variação

DIREÇÕES: ROTAÇÃO E DESLOCAMENTO										
Fase I			Alarmes							
	Amostra (m)	σ_e	X_1	X_2	X_3	X_4	Tx	Dx	PC ₁	PC ₂
T ~ N(0,1) D ~ N(0,1)	25	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
		0.5	0	0	0	0	0	0	0	0
		1.0	0	0	0	0	1	0	1	0
	100	0.1	0	0	0	0	0	0	1	0
		0.5	1	0	2	0	1	1	2	0
		1.0	0	0	0	1	0	0	0	0
	300	0.1	2	0	2	0	1	1	1	2
		0.5	1	0	0	0	0	0	1	1
		1.0	1	1	1	1	1	1	1	1
Fase II			Alarmes							
T ~ N(0,1) D ~ N(0,1)	1000	0.1	6	1	5	2	2	5	4	4
		0.5	0	0	0	0	1	1	1	5
		1.0	0	2	7	3	5	5	3	19
T ~ N(1,1) D ~ N(0,1)	1000	0.1	40	13	41	11	31	5	34	6
		0.5	3	5	3	6	28	2	20	6
		1.0	9	5	7	5	28	7	21	18
T ~ N(2,1) D ~ N(0,1)	1000	0.1	145	53	141	56	199	8	209	4
		0.5	21	22	25	32	168	0	97	34
		1.0	34	25	48	17	132	5	79	63
T ~ N(1,1) D ~ N(1,1)	1000	0.1	11	56	11	59	38	42	42	34
		0.5	2	32	0	44	25	26	6	59
		1.0	3	15	7	21	29	22	7	81
T ~ N(2,1) D ~ N(1,1)	1000	0.1	22	181	22	177	186	55	217	35
		0.5	4	102	2	124	179	27	33	160
		1.0	12	87	13	54	149	24	26	195
T ~ N(2,1) D ~ N(2,1)	1000	0.1	10	481	12	480	246	268	304	203
		0.5	1	266	1	325	169	153	19	420
		1.0	7	199	6	189	156	147	10	463

Dx = gráfico de controle para a variável transformada deslocamento.

Ainda, da análise do Quadro 5, chega-se às seguintes constatações:

- i. Considerando o processo em controle, observa-se que o número de alarmes falsos está dentro do esperado, para todas as representações, isto é, X_i 's, CP's e variáveis transformadas Tx e Dx;
- ii. Quando ocorrem deslocamentos da média do processo em uma das direções T ou D, o número de sinais emitidos pelo gráfico na variável transformada correspondente àquela direção aumenta, sendo que a frequência de sinais (que, dividida por 1000, no caso, se torna uma estimativa da probabilidade de sinal) varia, como esperado, em função da magnitude da alteração da média. Ocorrendo deslocamentos em ambas as direções (ou seja, uma rotação e um deslocamento) ambos os gráficos (Tx e Dx) têm sua probabilidade de sinal aumentada. Já os gráficos nas CP's, embora sinalizem, por não

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

corresponderem às direções de variação, não indicam o tipo (a direção) de alteração. Examinando, para cada alteração simulada, as três linhas correspondentes a $\sigma_e = 0,1, 0,5$ e $1,0$, observa-se que o gráfico na CP que emite mais sinais varia: ora um, ora outro, ora ambos, *para uma mesma perturbação na média de T e D*. Isso porque, como já visto, as direções das CP's obtidas pela ACP neste caso (em que as variâncias das perturbações aleatórias nas direções interpretáveis são iguais) são aleatórias, determinadas pelas flutuações dos dados usados na Fase I.

- iii. Em alguns casos os gráficos nos X_i 's emitem tantos alarmes quanto os gráficos nas CP's e os gráficos nas representações alternativas, dadas por Tx e Dx. Contudo, o X_i que sinaliza varia conforme o caso considerado, de modo que para garantir proteção contra qualquer alteração seria necessário manter gráficos para os quatro X_i 's. Consequentemente, isso implica em maior sobrecarga operacional, visto que seria preciso uma maior quantidade de gráficos do que se fossem utilizados as CP's ou Tx e Dx. Há ainda a possibilidade de que o número de alarmes falsos produzidos fosse maior.

6.3. Três direções de variação com iguais variâncias

Avaliou-se também o caso de três direções de perturbação com mesma variância, sob a ótica das CP's e das novas representações (Tx, Dx e Cx). Vide os quadros 6 e 7.

Quadro 6: Resultado da Análise de Componentes Principais

Variáveis Iniciais	$\sigma_e = 0.1$			$\sigma_e = 0.5$			$\sigma_e = 1.0$		
	PC ₁	PC ₂	PC ₃	PC ₁	PC ₂	PC ₃	PC ₁	PC ₂	PC ₃
x_1	0.40	-0.63	0.45	-0.79	0.33	-0.13	-0.19	0.12	-0.86
x_2	-0.51	-0.70	0.04	-0.21	-0.10	-0.85	-0.24	-0.71	-0.35
x_3	-0.16	-0.29	-0.80	-0.01	-0.84	-0.18	-0.75	-0.29	0.37
x_4	0.75	-0.21	-0.39	-0.57	-0.41	0.49	-0.58	0.63	-0.06
Desvio-padrão	2.22	2.03	1.92	2.25	2.19	2.05	2.23	2.16	2.04
% da variância Explicada	0.39	0.32	0.29	0.35	0.34	0.29	0.34	0.32	0.28

Novamente, considerando que o processo está sob controle e que as variâncias das direções consideradas são iguais, verifica-se pelo exame dos coeficientes das componentes que o método da ACP não conseguiu identificar corretamente as direções de variação.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Quadro 7: Número de alarmes obtidos para 3 direções de variação com mesma variância

DIREÇÕES: ROTAÇÃO, DESLOCAMENTO E CONTRAÇÃO												
Fase I			Alarmes									
	Amostra (m)	σ_e	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	Tx	Dx	Cx	PC1	PC2	PC3
T ~ N(0,1)	300	0.1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
D ~ N(0,1)		0.5	1	1	1	1	2	1	1	0	1	1
C ~ N(0,1)		1.0	1	1	0	1	2	0	0	0	0	1
Fase II			Alarmes									
T ~ N(0,1)	1000	0.1	2	5	7	0	2	8	5	0	4	6
D ~ N(0,1)		0.5	3	4	3	4	0	3	2	1	3	4
C ~ N(0,1)		1.0	7	6	7	3	5	8	5	2	3	5
T ~ N(1,1)	1000	0.1	7	8	22	2	16	7	5	5	5	14
D ~ N(0,1)		0.5	5	2	8	4	15	1	2	6	6	5
C ~ N(0,1)		1.0	7	13	6	12	25	6	4	2	29	7
T ~ N(2,1)	1000	0.1	29	28	51	20	124	2	2	55	2	37
D ~ N(0,1)		0.5	18	14	38	22	122	2	1	16	18	29
C ~ N(0,1)		1.0	40	31	22	35	154	4	2	2	105	31
T ~ N(1,1)	1000	0.1	5	37	7	16	13	40	4	17	8	14
D ~ N(1,1)		0.5	0	12	5	32	13	20	1	1	3	33
C ~ N(0,1)		1.0	4	39	1	45	25	35	5	8	48	7
T ~ N(2,1)	1000	0.1	8	81	20	58	122	44	5	118	9	6
D ~ N(1,1)		0.5	3	73	8	80	121	17	3	13	0	123
C ~ N(0,1)		1.0	13	97	7	105	137	26	6	3	189	7
T ~ N(2,1)	1000	0.1	15	679	50	12	120	207	168	94	423	9
D ~ N(2,1)		0.5	13	513	40	32	116	125	109	7	8	516
C ~ N(2,1)		1.0	32	569	18	44	145	149	120	21	403	56

Cx = gráfico de controle para a variável transformada contração.

Analisando o Quadro 7, é possível obter as seguintes conclusões:

- i. Verificou-se que as CP's, embora funcionem bem na detecção de pontos fora de controle, não mostram a mesma eficácia na identificação das direções de variação, só obtendo bons resultados para o menor desvio-padrão do erro aleatório considerado; mesmo nesse último caso, quando alterações ocorrem nas três direções de variação, os alarmes tenderam a concentrar-se em apenas uma componente, conforme pode ser observado nas últimas três linhas do Quadro.
- ii. Com relação às variáveis transformadas, observou-se a eficácia tanto na detecção das direções como nas alterações porventura sofridas pela média do processo. Esta observação pode ser evidenciada analisando as últimas três linhas do Quadro 7, da mesma forma que foi feito no item anterior.

6.4. Duas direções de variação, com variâncias diferentes

A seguir serão discutidos os resultados da simulação obtidos para duas direções de perturbação com variâncias diferentes sumarizados nos quadros 8 e 9. O modelo considerando duas direções de deslocamento é obtido por:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 +D -T +e_1 \\ x_2 &= 0 +D +T +e_2 \\ x_3 &= 0 -D +T +e_3 \\ x_4 &= 0 - D -T +e_4 \end{aligned}$$

Quadro 8: Resultado da Análise de Componentes Principais

Variáveis Iniciais	$\sigma_e = 0.1$		$\sigma_e = 0.5$		$\sigma_e = 1.0$	
	PC ₁	PC ₂	PC ₁	PC ₂	PC ₁	PC ₂
x ₁	-0.51	-0.49	-0.50	-0.52	0.51	-0.48
x ₂	0.49	-0.51	0.51	-0.50	-0.50	-0.51
x ₃	0.51	0.49	0.49	0.49	-0.51	0.50
x ₄	-0.49	0.51	-0.50	0.49	0.48	0.51
Desvio-padrão	5.35	2.06	6.55	1.96	6.23	2.11
% da Variância Explicada	0.87	0.129	0.91	0.08	0.86	0.098

Conforme o Quadro 8, observa-se que no caso em que as direções de deslocamento têm variâncias diferentes e o processo se encontra em controle, as CP's são eficazes em identificar essas direções. O fato de que a direção com maior variância corresponde ao maior eixo do elipsóide de isoprobabilidade faz com que a ACP consiga separar essas direções, associando a primeira CP à direção de maior variância (no caso, T). Em consequência, pode-se pensar que quanto maior a diferença entre os desvios das direções, mais as CP's coincidirão com Tx e Dx.

Os resultados no Quadro 9 mostram que neste caso as CP's têm desempenho muito semelhante ao das variáveis transformadas, na questão da detecção dos pontos fora de controle. A coincidência de desempenho dos dois esquemas de controle pode ser constatada simplesmente comparando os números de sinais dos gráficos nas CP's e dos gráficos nas variáveis transformadas nas células com fundo cinza do referido Quadro.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Quadro 9: Número de alarmes obtidos para duas direções considerando o desvio-padrão da Rotação maior que do Deslocamento

DIREÇÕES: ROTAÇÃO E DESLOCAMENTO										
Fase I			Alarmes							
	Amostra (m)	σ_e	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	Tx	Dx	PC ₁	PC ₂
T ~ N(0,3) D ~ N(0,1)	25	0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
		0.5	0	0	0	0	0	0	0	0
		1.0	0	0	0	0	0	0	0	0
	100	0.1	0	0	0	0	0	1	0	1
		0.5	0	0	0	0	0	1	0	1
		1.0	1	0	1	0	1	0	1	0
	300	0.1	2	1	2	1	1	1	1	0
		0.5	2	0	3	0	2	0	2	0
		1.0	0	0	0	0	0	0	0	0
Fase II			Alarmes							
T ~ N(0,3) D ~ N(0,1)	1000	0.1	7	7	7	8	11	0	11	0
		0.5	1	2	1	3	2	1	2	1
		1.0	1	1	0	2	0	3	0	4
T ~ N(1,3) D ~ N(0,1)	1000	0.1	8	8	8	9	6	2	6	2
		0.5	2	1	4	2	2	3	2	3
		1.0	0	5	0	5	1	2	1	6
T ~ N(2,3) D ~ N(0,1)	1000	0.1	17	25	16	23	23	3	23	2
		0.5	3	2	3	2	3	4	3	4
		1.0	5	4	6	4	7	7	8	7
T ~ N(1,3) D ~ N(1,1)	1000	0.1	6	27	6	28	18	8	18	9
		0.5	1	2	2	2	2	14	2	13
		1.0	0	2	1	4	0	18	0	25
T ~ N(2,3) D ~ N(1,1)	1000	0.1	7	45	5	43	24	13	24	17
		0.5	0	7	0	7	2	130	2	127
		1.0	2	12	2	15	4	25	3	34
T ~ N(2,3) D ~ N(2,1)	1000	0.1	12	88	12	86	27	129	25	136
		0.5	2	15	0	20	2	146	2	141
		1.0	1	24	3	35	5	147	5	186

7. Conclusões

A partir dos resultados obtidos por meio das simulações realizadas e dos objetivos traçados no estudo, os questionamentos levantados *a priori* podem ser finalmente respondidos.

Assim, com relação à identificação das direções de variação, constatou-se que o esquema baseado nas CP's mostrou eficácia nas seguintes situações:

- quando uma única direção de variação atuou no processo; e
- quando foram consideradas duas direções de perturbação (rotação e deslocamento), mas as variâncias dessas direções eram diferentes.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

Com mais de uma direção de variação, tendo as variações nessas direções variâncias iguais, os gráficos de controle nas CP's não identificaram adequadamente as direções de variação.

Além disso, cabe ainda ressaltar que quando os gráficos das CP's mostram eficácia na identificação das direções de variação interpretáveis, a magnitude do desvio-padrão do erro aleatório é um fator relevante. Quanto menor o desvio-padrão do erro, mais precisamente as primeiras CP's coincidirão com as direções de variação interpretáveis.

No que se refere à detecção de causas especiais, isto é, Fase II do CEP, verificou-se que os gráficos de controle das CP's obtiveram um bom desempenho na sinalização de causas especiais, mesmo no caso em que esse esquema não conseguiu identificar as direções de variação.

Com relação ao uso das variáveis transformadas observou-se que em todos os casos testados, esse esquema conseguiu sinalizar os descontroles, bem como identificar corretamente as direções em que ocorreu a perturbação. Além disso, ele é de aplicação relativamente simples, necessitando, porém, o conhecimento dessas direções.

Dessa forma, com base no que foi exposto, pode-se concluir que o esquema de controle baseado nas variáveis transformadas é preferível ao que utiliza CP's, pois constatou-se que esse esquema, em geral, é mais eficaz em sinalizar descontroles no processo, inclusive identificando o tipo de variação e facilitando o diagnóstico. No entanto, cabe ressaltar que ambos os esquemas propostos são mais eficazes no que se refere ao número de sinalizações do que o esquema de controle individual das variáveis observadas, tendo ainda a vantagem adicional de requererem uma menor quantidade de gráficos de controle e de levarem em conta a estrutura de correlação entre as variáveis.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece o apoio do Instituto Militar de Engenharia, e o segundo autor agradece o apoio do CNPq.

Referências Bibliográficas

APARISI, A., LUNA, M.A. & EPPRECHT, E. (2010). Optimisation of a set of \bar{X} or principal components control charts using genetic algorithms. *International Journal of Production Research*, 48(18), 5345–5361.

GAIO, A.P.C. & EPPRECHT, E.K. (2006). Controle estatístico de qualidade de processos em estágios, *Anais do XXVI ENEGEP*, Fortaleza-CE.

JACKSON, J.E. (1980). Principal components and factor analysis: part I – principal components. *Journal of Quality Technology* 12, 201-213.

JACKSON, J.E. (1981). Principal components and factor analysis: part II – principal components. *Journal of Quality Technology* 13, 46-58.

JOHNSON, R.A. & WICHERN, D.W. (2002). *Applied multivariate statistical analysis*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.

PESQUISA OPERACIONAL PARA O DESENVOLVIMENTO

MACHADO, M.A.G. & COSTA, A.F.B. (2008). The use of principal component and univariate charts to control multivariate processes. *Pesquisa Operacional* 28, 173-196.

MINGOTI, S.A. (2005). *Análise de Dados Através de Métodos de Estatística Multivariada: Uma Abordagem Aplicada*. Editora UFMG, Belo Horizonte.

RUNGER, G. & MONTGOMERY, D.C. (1997). Multivariate and univariate process control: geometry and shift directions. *Quality and Reliability Engineering International* 13, 909-922.

SCHALL, S. & CHANDRA, J. (1987). Multivariate quality control using principal components. *International Journal of Production Research* 25, 571-588.

SOUZA, A.M. & RIGÃO, M.H. (2005). Identificação de variáveis fora de controle em processos produtivos multivariados. *Revista Produção* 15, 74-86.