PODes
Revista Eletrônica Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento

Rio de Janeiro, v.3, n.1, p. 44-57, janeiro a abril de 2011

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS PARA O PROBLEMA DE CARREGAMENTO DE PALETES DO PRODUTOR

Ana Gabriela Rocha

gabirocha45@gmail.com

Departamento de Engenharia de Produção – UFSCar

Reinaldo Morabito

morabito@ufscar.br

Departamento de Engenharia de Produção – UFSCar

Alysson M. Costa

alysson@icmc.usp.br

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

Resumo

Neste estudo aplicamos o método de decomposição de Benders para resolver o problema de empacotar o maior número possível de retângulos dentro de um retângulo maior. Este problema aparece em contextos logísticos de carregamento de caixas iguais em camadas verticais sobre a superfície de um palete. A abordagem baseada em decomposição de Benders particiona o problema original em dois outros problemas, mais simples de serem resolvidos. Para verificar a eficácia da abordagem, realizaram-se testes computacionais, comparando os resultados obtidos com os obtidos por um software de otimização.

Palavras-chave: Problema de Carregamento de Paletes do Produtor, Método de Decomposição de Benders, Programação Inteira Mista.

Abstract

This study applies the decomposition method of Benders to a problem of packing as many possible of rectangles within a larger rectangle. This problem appears in logistics settings of loading identical boxes into vertical layers on the pallet surface. The approach based on Benders decomposition defines a relaxation algorithm which partitions the original problem in two other simpler problems to be solved. To verify the effectiveness of the approach, computational tests were performed, comparing the results obtained with those obtained by an optimization software.

Keywords: Manufacturer's Pallet Loading Problem, Benders Decomposition Method, Mixed Integer Programming.

Versão inicial submetida em 04/10/2010. Versão final recebida em 12/01/2011.

1. Introdução

O problema de carregamento de paletes (PCP) do produtor pode ser visto como um problema de arranjar o maior número possível de itens, de dimensões $(l \times w)$, em um retângulo maior (palete), de dimensões $(L \times W)$. Os itens devem estar completamente contidos no palete e não é permitida a superposição de itens (isto é, dois itens não podem ocupar o mesmo espaço do palete). Gilmore & Gomory (1965) observaram que empacotar caixas em vagões de carga ferroviários poderia ser visto como cortar pequenos paralelepípedos a partir de grandes paralelepípedos. Dyckhoff & Finke (1992) procuraram integrar estes problemas de empacotar e cortar em uma única categoria de problemas, denominada problemas de corte e empacotamento (PCE). Atualmente os PCE's são bem conhecidos na literatura de pesquisa operacional e logística, e centenas de artigos sobre o tema podem ser encontrados, conforme indicam os exames em ESICUP (2010) e Wäscher *et al.* (2007).

Diferentes formulações matemáticas podem ser utilizadas para representar o PCP (veja, por exemplo, OLIVEIRA & MORABITO, 2006 e RIBEIRO & LORENA, 2007). Em particular, em Tsai *et al.* (1993), o PCP do produtor é formulado como um modelo de programação inteira mista 0-1. O modelo envolve restrições disjuntivas e pode ser resolvido, por exemplo, por algoritmos do tipo branch-and-cut, explorando a estrutura particular do modelo. Outras formulações lineares 0-1 relacionadas são encontradas em Boschetti *et al.* (2002), Chen *et al.* (1995), Egebald & Pisinger (2009), Martins (2003), Padberg (2000) e Scheithauer & Terno (1993). Nas últimas décadas alguns métodos exatos e muitos métodos aproximados (heurísticos) foram propostos para resolver o PCP do produtor, baseados, entre outros, em técnicas de otimização combinatória, relaxação Lagrangiana e Surrogate, programação dinâmica, busca em grafo, heurísticas de bloco e metaheurísticas. Diversas referências a estes métodos podem ser encontradas em Alvarez-Valdez (2007), Birgin (2010), Lins (2003), Oliveira & Morabito (2006), Pureza & Morabito (2006) e Ribeiro & Lorena (2007). Limitantes superiores para o PCP também foram estudados, por exemplo, em Letchford & Amaral (2001) e Morabito & Farago (2002).

Benders (1962) propôs um método de particionamento para resolução de problemas de programação inteira mista que vem sendo aplicado com sucesso a problemas em diversos contextos (CAMARGO *et al.*, 2009; CORDEAU *et al.*, 2001; COSTA, 2005; GEOFFRION & GRAVES, 1974 e RANDAZZO & LUNA, 2001). No presente trabalho, estudamos a aplicação do método de decomposição de Benders para resolver o PCP do produtor bidimensional (através da adaptação do modelo proposto em Tsai *et al.* (1993). Para avaliar o desempenho do método, realizamos alguns experimentos computacionais baseados em problemas gerados artificialmente. Os resultados obtidos foram comparados com os obtidos ao resolver o mesmo modelo utilizando o pacote GAMS/CPLEX 7.0.

Uma das motivações da escolha do método de decomposição de Benders neste estudo é o fato dele ter tido bons resultados quando aplicado a vários outros problemas, conforme mencionado acima. Outra motivação para esta escolha é que, até onde temos conhecimento, nenhuma tentativa de utilização deste método foi efetuada para resolver o PCP.

2. Formulação do Problema

O modelo proposto por Tsai *et al.* (1993) permite que várias caixas de diversos tamanhos sejam colocadas no mesmo palete. É um problema que também leva em consideração a altura das caixas, pois elas podem ser armazenadas em mais de uma camada e cada carregamento pode ter mais de um tipo de caixa (PCP do distribuidor). O modelo tridimensional não garante a obtenção de carregamentos estáveis.

A seguir o modelo original de Tsai *et al.* (1993) é adaptado a um modelo bidimensional do PCP do produtor. Desta maneira, consideramos que podemos ter apenas caixas de dimensões $(l \times w)$ ou $(w \times l)$ para serem carregadas num palete $(L \times W)$, desconsiderando a altura das caixas. O problema é formulado como um problema de programação inteira mista 0-1, e descrito resumidamente neste trabalho. Para mais informações, vide Rocha (2008) e Tsai *et al.* (1993). Os parâmetros deste modelo para o PCP do produtor, caso bidimensional, são:

- S : conjunto de n caixas a serem consideradas, todas com dimensões $(l \times w)$ ou $(w \times l)$;
- (l_i, w_i): dimensões da caixa i, no conjunto S (note que se $l_i = l$, então $w_i = w$, e vice-versa);
- (L,W): dimensões do palete, comprimento e largura;
- (X^0, Y^0): canto inferior esquerdo do palete no plano cartesiano ao longo dos eixos x e y;
- M: número suficientemente grande.

Note que (X^0, Y^0) é definido para que todas as caixas em S caibam entre $(0,0)$ e (X^0, Y^0). O número de caixas, n, é $2 * \lfloor \frac{LW}{lw} \rfloor$, em que metade delas, $\lfloor \frac{LW}{lw} \rfloor$, tem tamanho $(l \times w)$ e a outra metade tem tamanho $(w \times l)$. As variáveis deste modelo são:

- (x_i, y_i) : variáveis de decisão (coordenadas x e y do canto inferior esquerdo da caixa i);
- P_i : variável de decisão binária associada à i-ésima caixa do conjunto S. A caixa i é colocada no palete se $P_i = 1$. A caixa i é descartada se $P_i = 0$.

Temos então o seguinte modelo:

$$Max\ Z = \sum_{i=1}^{n} P_i \tag{1}$$

sujeito a

$$x_j - x_i \le -l_j \quad \forall i < j \ \ ou \tag{2}$$
$$x_i - x_j \le -l_i \quad \forall i < j \ \ ou \tag{3}$$
$$y_j - y_i \le -w_j \quad \forall i < j \ \ ou \tag{4}$$
$$y_i - y_j \le -w_i \quad \forall i < j \ \ ou \tag{5}$$
$$x_i \ge X^0 P_i \quad \forall i \tag{6}$$
$$y_i \ge Y^0 P_i \quad \forall i \tag{7}$$
$$x_i \le (X^0 + L) - l_i \quad \forall i \tag{8}$$
$$y_i \le (Y^0 + W) - w_i \quad \forall i \tag{9}$$

$$P_i \in \{0,1\}$$
$$x_i, y_i \ge 0$$
$$i = 1,2,...,n$$
$$j = 1,2,...,n$$

As restrições (2) a (5) são restrições disjuntivas para evitar sobreposição das caixas. Para delimitar a colocação das caixas no palete tem-se as restrições (6) a (9). A função objetivo (1) maximiza o número total de caixas no palete. A solução deste modelo fornece o número máximo de caixas e suas respectivas localizações no palete.

As restrições disjuntivas de sobreposição podem ser convertidas para restrições padrões do tipo "e", introduzindo-se 2 conjuntos de variáveis binárias: $u_{i,j}^1, u_{i,j}^2$. Tem-se, então, 4 possíveis combinações dessas variáveis binárias. Assim, as restrições (2) a (5) são equivalentes a (TSAI *et al.*, 1993):

$$x_j - x_i \leq -l_j + M(u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2) \quad \forall i < j \tag{10}$$

$$x_i - x_j \leq -l_i + M(1-(u_{i,j}^2 - u_{i,j}^1)) \quad \forall i < j \tag{11}$$

$$y_j - y_i \leq -w_j + M(1-(u_{i,j}^1 - u_{i,j}^2)) \quad \forall i < j \tag{12}$$

$$y_i - y_j \leq -w_i + M[2-(u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2)] \quad \forall i < j \tag{13}$$

$$u_{i,j}^1, u_{i,j}^2 \in \{0,1\}$$

Desde que M seja suficientemente grande, pode-se ignorar outros termos no lado direito destas equações quando o termo em *M* não for anulado pelos valores das variáveis $u_{i,j}$. O valor resultante do lado direito das equações está indicado, portanto, somente como M na tabela 1. Nesta tabela, uma das 4 restrições originais não deverá mudar e o restante não terá efeito por causa do grande valor de *M*.

Tabela 1: Restrições disjuntivas para o caso bidimensional

variáveis binárias		valor das equações (lado direito)				equações de restrições aplicáveis
$u_{i,j}^1$	$u_{i,j}^2$	eq. (10)	eq. (11)	eq. (12)	eq. (13)	
0	0	$-l_j$	M	M	M	eq. (10)
0	1	M	$-l_i$	M	M	eq. (11)
1	0	M	M	$-w_j$	M	eq. (12)
1	1	M	M	M	$-w_i$	eq. (13)

Para cada par (i, j) com $i < j$ e M suficientemente grande, tem-se 4 possibilidades: se $u_{i,j}^1 = u_{i,j}^2 = 1$, a restrição que ficará válida é a restrição (13); se $u_{i,j}^1 = u_{i,j}^2 = 0$, a restrição que não será redundante é a restrição (10); se $u_{i,j}^1 = 0$ e $u_{i,j}^2 = 1$, a restrição que ficará válida é a restrição (11); se $u_{i,j}^1 = 1$ e $u_{i,j}^2 = 0$, a restrição que não será redundante é a restrição (12). Note que o número de restrições deste modelo aumenta exponencialmente com o número de caixas n.

A escolha do modelo de Tsai *et al.* (1993) para ser adaptado ao problema do carregamento de paletes do produtor se deveu ao fato das variáveis inteiras e contínuas deste modelo serem facilmente separáveis, facilitando a aplicação do método básico de decomposição de Benders. Neste estudo, consideramos os mesmos parâmetros e as mesmas variáveis do modelo de Tsai *et al.* (1993) exemplificado anteriormente e, sem perda de generalidade, modificamos a função objetivo original do modelo em Tsai *et al.* (1993) de $Max \sum_{i=1}^{n} P_i$ para:

$$Min \; -\sum_{i=1}^{n} P_i + \frac{(x_1 + y_1 + x_2 + y_2)}{n(X^0 + L + Y^0 + W)} \tag{14}$$

para que esta função também envolva variáveis contínuas do problema. Admitimos que a peça 1 tem dimensões $(l \times w)$ e a peça 2, $(w \times l)$. O segundo termo da função objetivo faz com que, sem perda de generalidade, uma dentre estas peças seja colocada na origem do palete. Além disso, o segundo termo é sempre menor que 1 (isto é, um número fracionário), o que o torna de segunda ordem com relação ao primeiro termo (que sempre é um número inteiro). O denominador do segundo termo da função objetivo é multiplicado por n (número de caixas), mas poderia ser multiplicado por 2, também sem perda de generalidade, já que no numerador há as coordenadas de duas caixas ($i = 1$ e $i = 2$). As restrições também são modificadas em relação ao modelo original para que sejam válidas somente se as caixas forem empacotadas no palete. Caso contrário, as caixas são todas colocadas na origem $(0,0)$, pois apenas as caixas selecionadas precisam respeitar as restrições de sobreposição (vide equações (19) a (21)). Assim, o valor de X^0 e Y^0 será o máximo entre l_i e w_i para que as caixas colocadas na origem caibam entre a origem e o canto inferior esquerdo da palete. As restrições ficam então da seguinte forma:

$$x_i - x_j \geq l_j P_j - M(u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2) \;\; \forall i < j \tag{15}$$

$$x_j - x_i \geq l_i P_i - M[1 - (u_{i,j}^2 - u_{i,j}^1)] \;\; \forall i < j \tag{16}$$

$$y_i - y_j \geq w_j P_j - M[1 - (u_{i,j}^1 - u_{i,j}^2)] \;\; \forall i < j \tag{17}$$

$$y_j - y_i \geq w_i P_i - M[2 - (u_{i,j}^1 + u_{i,j}^2)] \;\; \forall i < j \tag{18}$$

$$x_i \geq X^0 P_i \quad \forall i \tag{19}$$

$$y_i \geq Y^0 P_i \quad \forall i \tag{20}$$

$$-x_i \geq (-(X^0 + L) + l_i) P_i \quad \forall i \tag{21}$$

$$-y_i \geq (-(Y^0 + W) + w_i) P_i \quad \forall i \tag{22}$$

$$P_1 + P_2 \geq 1 \tag{23}$$

$$\sum_i P_i \geq \max\{\lfloor L/l \rfloor \times \lfloor W/w \rfloor, \lfloor L/w \rfloor \times \lfloor W/l \rfloor\} \tag{24}$$

$$-\sum_i P_i \geq -\left\lfloor \frac{L \times W}{l \times w} \right\rfloor \tag{25}$$

$$u_{i,j}^1, u_{i,j}^2, P_i \in \{0,1\}$$
$$x_i, y_i \geq 0$$
$$i, j = 1,2,\ldots,n$$

Note que as restrições (15) a (18), (21) e (22) são ligeiramente diferentes das restrições originais em Tsai *et al.* (1993) (observe os termos com as variáveis P_i e P_j). A restrição (23) garante que a peça 1 ou a peça 2 esteja no palete, fazendo com que a mudança na função objetivo seja válida. Para melhorar os limitantes inferiores e superiores iniciais do número de caixas, as restrições (24) e (25) também foram incluídas. Para uma discussão mais detalhada deste modelo, veja Rocha (2008).

3. Aplicação de decomposição de Benders no Modelo de Tsai et al. (1993)

A abordagem de Benders baseia-se no particionamento do problema original em dois problemas mais simples, chamados de problema mestre e de subproblema (BENDERS, 1962; COSTA, 2005). O problema mestre é uma relaxação do problema original, no sentido em que contém apenas um subconjunto das variáveis originais e as restrições associadas. O subproblema, por sua vez, é uma versão do problema original, em que as variáveis já utilizadas no problema mestre estão fixadas. O algoritmo resolve cada um dos dois problemas iterativamente, da seguinte maneira: resolve-se o problema mestre obtendo-se uma solução tentativa para as variáveis deste problema e um limitante dual (primal) para a solução do problema de minimização (maximização) original. Os valores das variáveis obtidos são utilizados na resolução do subproblema.

Caso a resolução do subproblema resulte infactível, é possível obter, por meio da teoria da dualidade, um raio extremo da região factível do subproblema que gera um corte válido para o problema mestre (chamado corte de Benders de infactibilidade). Analogamente, caso o subproblema seja factível, o ponto extremo obtido pode ser usado para gerar-se um outro tipo de corte (chamado corte de Benders de otimalidade). Neste último caso, note que uma solução factível foi encontrada e, portanto, um limitante primal (dual), foi obtido para o problema de minimização (maximização) original. Em ambos os casos, o corte obtido é inserido no problema mestre e o algoritmo itera até que se consiga obter limitantes primais e duais iguais (a menos de uma tolerância) e, portanto, uma solução provadamente ótima para o problema original.

Para facilitar a apresentação da aplicação da decomposição de Benders no PCP, a seguir revisamos resumidamente a abordagem de Benders. Considere o problema inteiro misto descrito abaixo:

$$Min \quad cx + dy \tag{26}$$
$$s.a \quad Ax + By \geq b \tag{27}$$
$$Dy \geq e \tag{28}$$
$$x \geq 0, y \geq 0 \;\; e \;\; inteiro \tag{29}$$

Este problema pode ser reescrito como:

$$min_{\bar{y} \in Y} \{d\bar{y} + min_{x \geq 0}\{cx : Ax \geq b - B\bar{y}\}\} \tag{30}$$

em que $Y = \{y \mid Dy \geq e, y \geq 0 \;\; e \;\; inteiro\}$.

A minimização interna em cx é um problema linear. Associando-se variáveis duais às restrições $Ax \geq b - B\bar{y}$, pode-se escrever a versão dual deste problema como:

$$max_{u \geq 0}\{u(b - B\bar{y}) : uA \leq c\} \tag{31}$$

O problema (31) é o subproblema no método de decomposição de Benders. Usando este subproblema, podemos reescrever o problema (30) como:

$$min_{\bar{y} \in Y} \{d\bar{y} + max_{u \geq 0}\{u(b - B\bar{y}) : uA \leq c\}\} \tag{32}$$

O poliedro convexo $U = \{u \geq 0 : uA \leq c\}$ é independente de y. Note que o mesmo não ocorre com o poliedro convexo $\{x \geq 0 : Ax \geq b - B\overline{y}\}$ em (30), que depende de y. Sejam $u^p (p = 1,...,P)$ os pontos extremos de U e $v^s (s = 1,...,S)$ os raios extremos de U. A solução do subproblema pode ser limitada ou ilimitada. Se for limitada, a solução é um ponto extremo u^p. No segundo caso, existe uma direção v^s para a qual $v^s(b - B\overline{y}) > 0$. Esta solução ilimitada resulta em um problema primal infactível e, por isso, deve ser evitada. Assim, devemos eliminar estes valores de $\overline{y}$. Isto pode ser feito considerando as restrições:

$$v^s(b - B\overline{y}) \leq 0 \quad (s = 1,...,S) \tag{33}$$

Com essas restrições, o valor máximo do problema interno de maximização em (32) é o valor de um dos pontos extremos de *U*. Assim,

$$min_{\overline{y} \in Y}\{d\overline{y} + max_{u \geq 0}\{u^p(b - B\overline{y}) : p = 1,...,P\}\} \tag{34}$$

$$s.a. \; v^s(b - B\overline{y}) \leq 0 : s = 1,...,S \tag{35}$$

Fazendo uso da variável auxiliar *z*, temos então o problema mestre:

$$Min \quad dy + z \tag{36}$$

$$s.a \;\; z \geq u^p(b - By), \;\; p = 1,...,P \tag{37}$$

$$v^s(b - By) \leq 0, \;\; s = 1,...,S \tag{38}$$

$$y \in Y, z \geq 0 \tag{39}$$

Substituindo $dy + z$ por $z0$, o problema mestre acima pode então ser reescrito na forma:

$$Min z0 \tag{40}$$

$$s.a \;\; z0 \geq dy + u^p(b - By), \;\; p = 1,...,P \tag{41}$$

$$v^s(b - By) \leq 0, \;\; s = 1,...,S \tag{42}$$

$$y \in Y \tag{43}$$

O número de pontos e raios extremos tende a ser muito grande, impossibilitando a enumeração explícita das restrições (41) e (42). Benders propôs uma estratégia de geração dinâmica destas restrições, gerando um problema mestre relaxado na forma:

$$Min \;\; z0 \tag{44}$$

$$s.a. \;\; y \in Y \tag{45}$$

e em cada iteração k, o problema acima agrega um novo corte do tipo (41) ou (42). O subproblema serve para testar a factibilidade/otimalidade de uma proposta $[y^k, z0^k]$ do problema mestre ((40)-(43)), em que k é a *k*-ésima iteração (isto é, com $1,2,...,k$ cortes). O problema mestre é um problema nas variáveis y e gera propostas de y para o subproblema. O subproblema testa as propostas do problema mestre e é um problema nas variáveis u.

Considerando-se UB um limitante superior, LB um limitante inferior para o problema de minimização (40)-(43), e ε a precisão desejada, o algoritmo de decomposição de Benders clássico pode ser escrito da seguinte forma:

Passo 1: faça $UB = \infty, LB = -\infty$;

Passo 2: resolva o problema mestre relaxado ((44)-(45)), obtendo, assim, um valor inicial para y;

Passo 3: com os valores de y fixados, resolva o subproblema (31) para obter u^*. Caso o subproblema seja factível, atualize o valor do $UB = min\{UB, d\bar{y} + u^*(b - B\bar{y})\}$ (isto é, o valor da melhor solução factível até então);

Passo 4: gere uma nova restrição para o problema mestre (ponto extremo (41) ou raio extremo (42));

Passo 5: resolva o problema mestre (44)-(45) com o corte do Passo 4 adicionado, para obter $y^*, z0^*$. Calcule o novo $LB = z0^*$;

Passo 6: $UB - LB \leq \varepsilon$? Se sim, FIM. Senão, volte ao passo 3.

Neste trabalho apresentamos resumidamente o método proposto por Benders. Para mais detalhes deste método podem ser consultados os trabalhos de Benders (1962) e Rocha (2008), entre outros. Na sequência, detalha-se o algoritmo de Benders para o PCP, utilizando as formulações anteriormente apresentadas.

Sejam u e P fixos (notação $\bar{u}$ e $\bar{P}$), e sendo $v1_{i,j}$, $v2_{i,j}$, $v3_{i,j}$, $v4_{i,j}$, $v5_i$, $v6_i$, $v7_i$ e $v8_i$ as variáveis duais associadas, respectivamente, às restrições (15), (16), (17), (18), (19), (20), (21) e (22), o subproblema dual é dado por:

$$\begin{aligned} Max \sum_{i,j:i<j} (v1_{i,j}(l_j \cdot \bar{P}_j - M(\bar{u}^1_{i,j} + \bar{u}^2_{i,j}))) + \sum_{i,j:i<j} (v2_{i,j}(l_i \cdot \bar{P}_i - M(1 + \bar{u}^1_{i,j} \\ - \bar{u}^2_{i,j}))) + \sum_{i,j:i<j} (v3_{i,j}(w_j \cdot \bar{P}_j - M(1 - \bar{u}^1_{i,j} + \bar{u}^2_{i,j}))) + \sum_{i,j:i<j} (v4_{i,j}(w_i \cdot \bar{P}_i \\ - M(2 - \bar{u}^1_{i,j} - \bar{u}^2_{i,j}))) + \sum_i X^0 \cdot \bar{P}_i \cdot v5_i + \sum_i Y^0 \cdot \bar{P}_i \cdot v6_i \\ + \sum_i (-X^0 - L + l_i) \cdot \bar{P}_i \cdot v7_i + \sum_i (-Y^0 - W + w_i) \cdot \bar{P}_i \cdot v8_i \end{aligned} \tag{46}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} \sum_{j:i<j} 1 \cdot v1_{i,j} + \sum_{j:i>j} -1 \cdot v1_{j,i} + \sum_{j:i<j} -1 \cdot v2_{i,j} + \sum_{j:i>j} 1 \cdot v2_{j,i} \\ + v5_i - v7_i \leq \frac{g_i}{n \cdot (X^0 + Y^0 + L + W)}, \quad i = 1,\dots,n, \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j:i<j} 1 \cdot v3_{i,j} + \sum_{j:i>j} -1 \cdot v3_{j,i} + \sum_{j:i<j} -1 \cdot v4_{i,j} + \sum_{j:i>j} 1 \cdot v4_{j,i} \\ + v6_i - v8_i \leq \frac{g_i}{n \cdot (X^0 + Y^0 + L + W)}, \quad i = 1,\dots,n, \end{aligned} \tag{48}$$

onde g_i vale 1 para $i = 1,2$ e 0 para $i = 3,...,n$.

Resolvendo o subproblema dual (46)-(48), encontramos os pontos ou raios extremos que geram os cortes a serem adicionados ao problema mestre. As restrições (24) e (25) são adicionadas ao problema mestre e a restrição (25) é reescrita como na restrição (50) a seguir. O problema mestre fica então da seguinte forma:

$$Min\ z0 \tag{49}$$

sujeito a

$$z0 \geq -\left\lfloor \frac{L \times W}{l \times w} \right\rfloor \tag{50}$$

$$\sum_i P_i \geq \max\{\lfloor L/l \rfloor \times \lfloor W/w \rfloor, \lfloor L/w \rfloor \times \lfloor W/l \rfloor\} \tag{51}$$

$$z0 \geq \sum_i -P_i + k1 + \sum_{i,j:i<j} [k2_{i,j} \cdot u^1_{i,j} + k3_{i,j} \cdot u^2_{i,j}]$$
$$+ \sum_i k4_i \cdot P_i + \sum_{i,j:i<j} [k5_{i,j} \cdot P_i] + \sum_{i,j:i<j} [k6_{i,j} \cdot P_j] \tag{52}$$

$$0 \geq k1 + \sum_{i,j:i<j} [k2_{i,j} \cdot u^1_{i,j} + k3_{i,j} \cdot u^2_{i,j}]$$
$$+ \sum_i k4_i \cdot P_i + \sum_{i,j:i<j} [k5_{i,j} \cdot P_i] + \sum_{i,j:i<j} [k6_{i,j} \cdot P_j] \tag{53}$$

em que

$$k1 = \sum_{i,j:i<j} M \cdot (-v2_{i,j} - v3_{i,j} - 4v4_{i,j}) \tag{54}$$

$$k2_{i,j} = M(-v1_{i,j} - v2_{i,j} + v3_{i,j} + v4_{i,j}) \quad \forall i < j \tag{55}$$

$$k3_{i,j} = M(-v1_{i,j} + v2_{i,j} - v3_{i,j} + v4_{i,j}) \quad \forall i < j \tag{56}$$

$$k4_i = X^0 \cdot v5_i + Y^0 \cdot v6_i + (-X^0 - L + l_i) \cdot v7_i$$
$$+ (-Y^0 - W + w_i) \cdot v8_i \quad \forall i \tag{57}$$

$$k5_{i,j} = v2_{i,j} \cdot l_i + v4_{i,j} \cdot w_i \quad \forall i \tag{58}$$

$$k6_{i,j} = v1_{i,j} \cdot l_j + v3_{i,j} \cdot w_j \quad \forall i \tag{59}$$

sendo que $v1_{i,j}$, $v2_{i,j}$, $v3_{i,j}$, $v4_{i,j}$, $v5_i$, $v6_i$, $v7_i$ e $v8_i$ são fixados pelo último valor encontrado no subproblema dual.

A eficiência computacional do algoritmo anterior depende principalmente de três questões: o número de iterações necessárias para convergência global; o tempo gasto na resolução do subproblema em cada iteração; o tempo e o esforço computacional demandados para resolução do problema mestre.

Neste sentido, diversas extensões e modificações já foram propostas na literatura com o intuito de acelerar a convergência do método de Benders. Na sequência, discutimos algumas destas estratégias.

Uma das maneiras mais simples de se acelerar a convergência do algoritmo de Benders é por meio da introdução de restrições *a priori* no problema mestre, de modo a direcionar, desde a iteração inicial, a escolha das soluções tentativa. Neste trabalho, foram inseridas restrições de limites iniciais para o número de caixas no problema mestre inicial.

Outra estratégia para se tentar diminuir o esforço computacional na resolução do problema mestre é a resolução preliminar do problema relaxado linear (McDANIEL & DEVINE, 1977). Os cortes gerados durante a fase linear são válidos para o problema mestre original e, em geral, aceleram a convergência do algoritmo. Como a fase linear pode ser resolvida rapidamente, tal estratégia pode ser benéfica na diminuição do tempo global de execução do algoritmo.

Uma terceira extensão do método de Benders clássico consiste na tentativa de obtenção de cortes mais profundos a cada iteração. Isso pode ser obtido através de um problema auxiliar, chamado de problema de Pareto (MAGNANTI & WONG, 1981). A idéia é se obter o melhor corte possível não apenas para a solução tentativa atual, mas também para soluções tentativas futuras.

A estratégia consiste em buscar, dentre todas as soluções duais que são ótimas para a solução tentativa y considerada, aquela que eventualmente seria a melhor para outros valores de solução tentativa. Isso é feito através da resolução de um subproblema dual auxiliar, chamado subproblema de Pareto, que usa como solução y tentativa um ponto do interior da região factível. Como as variáveis y neste problema são binárias, pode-se emular tal ponto interior através da utilização de uma solução y contendo todas as componentes com valor 0,5. As dificuldades da utilização do método de Pareto neste estudo são discutidas na próxima seção.

4. Resultados Computacionais

Nesta seção descrevemos os resultados de alguns testes realizados com o objetivo de avaliar o método de decomposição de Benders aplicado ao PCP do produtor. Escolhemos um pacote que contivesse uma linguagem de modelagem algébrica em programação matemática para facilitar sua implementação e resolução. Apesar dos altos tempos computacionais associados a esta escolha, a facilidade de implementação e o caráter didático e exploratório da proposta deste artigo justificaram a decisão. De fato, por tratar-se de uma primeira aplicação da abordagem de Benders (usualmente tida como de difícil entendimento e implementação) para o PCP, decidiu-se pelo desenvolvimento de códigos que prezassem o fácil entendimento e a rápida reprodução em oposição a uma pura eficiência computacional.

Os códigos desenvolvidos em linguagem GAMS / CPLEX e as 30 instâncias utilizadas podem ser encontradas em Rocha (2008). Todos os resultados apresentados nas próximas seções foram obtidos em um Pentium DualCore com processador de 3.00 GHz e 1G de memória RAM. O tempo máximo de execução do pacote GAMS/CPLEX em todas as instâncias foi limitado em 1000 segundos. Note que o número de caixas n é dado por número de caixas (l,w) que é $n/2$, mais o número de caixas (w,l), que também é $n/2$. Convém observar que experimentos preliminares mostraram que a variação do valor de M nas restrições disjuntivas do modelo da seção anterior não implicou em mudanças nos resultados. Por isso foi adotado um valor padrão de $M = max(X^0 + L, Y^0 + W)$ para cada instância.

Tabela 2: GAMS/CPLEX X Benders Clássico

		GAMS/CPLEX		Benders Clássico	
Exemplo	n. caixas	tempo médio	n. soluções	tempo médio	n. soluções
	intervalo	(seg)	ótima/fact	(seg)	ótima/fact
Grupo 1	[2, 4]	0,022	10/10	0,.426	10/10
Grupo 2	[8, 12]	800,018	2/10	1000	0/0
Grupo 3	[18, 80]	1000	0/6	1000	0/0

Os resultados da tabela 2 mostram que o método de decomposição de Benders resolveu otimamente todos os 10 exemplos do grupo 1, no entanto, sempre em um tempo maior do que o pacote GAMS/CPLEX com parâmetros em default. Ao resolver os 10 exemplos do grupo 2 (tabela 2), o método de Benders atingiu o limite de tempo sem encontrar uma solução. O limite de tempo também foi atingido usando o GAMS/CPLEX para 8 dos 10 exemplos, mas a solução subótima encontrada sempre foi inteira, isto é, factível. Dois exemplos encontraram solução ótima dentro do tempo estipulado usando o pacote GAMS/CPLEX (ROCHA, 2008).

Os 10 exemplos do grupo 3 (tabela 2), quando resolvidos com o método de Benders clássico, também têm sua resolução interrompida no limite de tempo, sem encontrar uma solução. Esses exemplos quando resolvidos usando o default do pacote GAMS/CPLEX, são interrompidos por causa do limite de tempo e não têm a otimalidade da solução provada, mas a última solução encontrada em 6 dos 10 exemplos é inteira. Nos outros 4 exemplos, o GAMS/CPLEX não encontra solução inteira antes do tempo limite. Para mais detalhes destes resultados dos grupos 1, 2 e 3, o leitor pode consultar Rocha (2008).

Também foi comparado o desempenho do método de Benders usando-se a estratégia de se resolver primeiro o problema mestre com restrições de integralidade relaxadas até que certo *gap* seja alcançado, e só então resolver o problema mestre como um problema inteiro (conforme discutido na seção anterior). Esta estratégia foi chamada de método de Benders relaxado. O *gap* adotado neste trabalho foi de 1% da solução ótima. Outros *gaps* foram testados, menores e maiores que 1%, mas não houve melhoras nos resultados dentro do tempo estipulado de 1000 segundos.

Os exemplos do grupo 1, quando resolvidos com o método de Benders clássico, resultaram numa solução ótima com o número de iterações menor que quando resolvido usando o método de Benders relaxado, que também obteve solução ótima. Porém, o tempo do solução foi menor em 6 exemplos usando o método de Benders clássico. Nos outros 4 exemplos, apesar do número total de iterações (incluindo iterações com o problema mestre relaxado ou não) ser maior, o tempo de solução foi menor usando o método de Benders relaxado.

Os exemplos do grupo 2, quando resolvidos com o método de Benders relaxado, foram interrompidos no limite de iteração (1000 iterações) sem encontrar solução. Os valores de LB/UB são os mesmos do método clássico. A diferença do método de Benders relaxado é que, ao invés de resolver 1000 iterações inteiras como no método de Benders clássico, resolvem-se menos iterações com variáveis inteiras.

Os exemplos do grupo 3, quando resolvidos com o método de Benders relaxado, foram interrompidos no limite de iteração sem encontrar solução. Os valores de LB/UB são iguais aos do método clássico com exceção de 1 exemplo. O método de Benders relaxado resolve um pouco menos de 1000 iterações só com variáveis inteiras em 3 exemplos, enquanto que o método de Benders clássico resolve todas as iterações do problema mestre com variáveis inteiras.

O baixo desempenho obtido para o método de Benders relaxado contrasta com o obtido em outros problemas na literatura, o que levou a uma análise do modelo usado. De fato, é interessante notar que as variáveis $u_{i,j}^1$, $u_{i,j}^2$ e P_i são binárias no problema original. Quando o problema mestre é resolvido relaxado, estas variáveis, antes binárias, passam a tomar valores entre 0 e 1, e esses valores são utilizados no subproblema dual. Mas como o subproblema dual foi obtido a partir do problema linear que continha restrições disjuntivas, ao usarmos as variáveis que eram inicialmente binárias como contínuas, todas as restrições disjuntivas se tornam redundantes, o que explica o baixo desempenho da extensão de McDaniel & Devine (1977) neste problema.

O método de decomposição de Benders clássico também foi testado e implementado fazendo algumas mudanças para que o corte de Pareto fosse considerado (veja discussão na seção anterior). Os resultados obtidos não foram melhores que os obtidos com o Benders clássico ou com o relaxado. A explicação, novamente, gira em torno da estrutura do modelo da seção 2 e da presença de restrições disjuntivas. De fato, a adoção de restrições disjuntivas torna ineficaz a utilização de cortes de Pareto pelo fato de, neste tipo de modelo, somente uma das restrições envolvidas para cada conjunto de restrições disjuntivas ficar ativa em cada solução factível. Este fato está associado à escolha de valores 0 ou 1 para variáveis como $u_{i,j}^1$ e $u_{i,j}^2$. Como o corte de Pareto baseia-se na utilização de pontos interiores (para simular futuras soluções inteiras) e, devido à presença de um parâmetro de alto valor (M), o problema auxiliar gerado acaba por não representar bem o problema original e, portanto, não gerando bons cortes.

Apesar da relativa ineficiência apresentada, o estudo realizado pode apresentar-se mais competitivo em outras situações, o que valida os desenvolvimentos exploratórios propostos. De fato, Geoffrion e Graves (1974) mencionam a vantagem do método de Benders no caso de re-otimização. Basicamente, se vários problemas parecidos precisam ser resolvidos, os cortes de um podem ser usados na resolução dos outros, o que acelera o processo. Para isso, basta que as variáveis duais permaneçam factíveis com as mudanças nos parâmetros do modelo. No caso deste estudo, os desenvolvimentos propostos permitem testar vários valores de $L \text{x} W$ de maneira eficiente, observando que as variáveis duais permanecem factíveis nas restrições (47) e (48) com a diminuição dos valores de L e W. Assim, uma opção seria resolver o problema com os maiores valores de L e W existentes e usar os cortes obtidos para inicializar a resolução dos problemas menores. Algo similar pode ser feito com os valores de l e w, já que neste caso, as variáveis duais permanecem factíveis sempre.

5. Considerações finais

Neste trabalho, apresentamos uma aplicação do método de decomposição de Benders para o PCP. Tratou-se de um trabalho de certa forma exploratório, uma vez que não se tem conhecimento de nenhuma outra tentativa de aplicação do método para esta classe de problemas. Escolheu-se o modelo de Tsai *et al.* (1993) pelo fato deste possuir conjuntos facilmente identificáveis de variáveis inteiras e contínuas, o que facilita a aplicação da decomposição. Curiosamente, mostra-se neste trabalho que é exatamente a estrutura do modelo (baseado em restrições disjuntivas) que impede o funcionamento eficaz de duas das extensões do método que costumam apresentar melhores resultados: a resolução preliminar do problema linear e a obtenção de cortes de Pareto. Novos estudos focando em outros modelos para o PCP do produtor sem as características mencionadas serão objeto de pesquisas futuras.

Agradecimentos: Os autores agradecem ao Dr. Horácio H. Yanasse do LAC/INPE pelos úteis comentários e sugestões. Este trabalho contou com apoio do CNPq e Fapesp.

Referências Bibliográficas

ALVAREZ-VALDEZ, R; PARRENO, F; TAMARIT, J.M. (2007). A branch-and-cut algorithm for the pallet loading problem. Computers & Operations Research, 32 , 3007-3029.

BENDERS, J. (1962) Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. Numerisch Mathematik , 4, 238-252.

BIRGIN, E.; LOBATO, R.D.; MORABITO, R. (2010). An effective recursive partitioning approach for the packing of identical rectangles in a rectangle. Journal of the Operational Research Society, 61, 306-320.

BOSCHETTI, M.A.; MINGOZZI, A.; HADJICONSTANTINOU, E. (2002). New upper bounds for the twodimensional orthogonal non-guillotine cutting stock problem. IMA Journal of Management Mathematics, 13 , 95-119.

CAMARGO, R.S.; MIRANDA, G.J.; LUNA, H.P.L. (2009). Benders Decomposition for Hub Location Problems with Economies of Scale. Transportation Science, 43, 86-97.

CHEN, C.S.; LEE, S.M.; SHEN, Q.S. (1995). An analytical model for the container loading problem. European Journal of Operational Research, 80, 68-76.

CORDEAU, J.F.; SOUMIS, F.; DESROSIEERS, J. (2001). Simultaneous assignment of locomotives and cars to passenger trains. Operations Research, 49, No. 4, 531-548.

COSTA, A.M. (2005). A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. Computers & Operations Research, 32, 1429-1450.

DYCKHOFF, H. & FINKE, U. (1992). Cutting and packing in production and distribution: Typology and bibliography. Springler-Verlag Co, Heidelberg.

EGEBLAD, J. & PISINGER, D. (2009). Heuristic approaches for the two- and three-dimensional knapsack packing problem. Computers and Operations Research, 36, 1026-1049.

ESICUP, Special Interest Group on Cutting and Packing, online library, disponível em http://fe.up.pt/esicup . Acesso em Agosto de 2010.

GEOFFRION, A.M. & GRAVES, G.W. (1974). Multicomodity distribution system design by Benders decomposition. Management Science, 20, 822-844.

GILMORE, P. & GOMORY, R. (1965). Multistage Cutting Stock Problems of Two and More Dimensions. Operations Research, 14, 94-120.

LETCHFORD, A. & AMARAL, A. (2001). Analysis of upper bounds for the pallet loading problem. European Journal of Operational Research, 132, 582-593.

LINS, L.; LINS, S.; MORABITO, R. (2003). An L-approach for packing (l,w)-rectangles into rectangular and L-shaped pieces. Journal of the Operational Research Society, 54, 777-789.

MAGNANTI, T.L. & WONG, R.T. (1981). Accelerating Benders Decomposition: Algorithmic Enhacement and Model Selection Criteria. Operations Research, 23, 464-484.

MARTINS, G.H.A. (2003). Packing in two and three dimensions. PhD thesis, Naval Post-graduate School, CA.

MCDANIEL, D. & DEVINE, M. (1977). A modified Benders' partitioning algorithm for mixed integer programming. Management Science, 24, 312-319.

MEVERT, P. (1977). Fixed Charge Network Flow Problems: Applications and Methods of Solution, presented at Large Scale and Hierarchical Systems Workshop, Brussels (May).

MORABITO, R. & FARAGO, R. (2002). A tight Lagrangean relaxation bound for the manufacturer´s pallet loading problem. Studia Informatica Universalis, 2, No. 1, 57-76.

OLIVEIRA, L.K. & MORABITO, R. (2006). Métodos exatos baseados em relaxações Lagrangiana e surrogate para o problema de carregamento de paletes do produtor. Pesquisa Operacional, 26, No. 2, 403-432.

PADBERG, M. (2000). Packing small boxes into a big box. Mathematical methods of operations research, 52, 1-21.

PUREZA, V. & MORABITO, R. (2006). Some experiments with a simple tabu search algorithm for the manufacturer´s pallet loading problem. Computers & Operations Research, 33, 804-819.

RANDAZZO, C. & LUNA, H. (2001). A comparison of optimal methods for local access uncapacitated network design. Annals of Operations Research, 106, 263-286.

RIBEIRO, G.M. & LORENA, L.A.N. (2007). Optimizing the woodpulp stowage using Lagrangean relaxation with clusters. Journal of the Operational Research Society, 59, 600-606.

ROCHA, A.G. (2008). Aplicação do método de decomposição de Benders para o problema de carregamento de paletes, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos.

SCHEITHAUER, G. & TERNO, J. (1993) Modeling of packing problems. Optimization, 28, 63-84.

TSAI, R.D. ; MALSTROM, E.M.; KUO, W. (1993). Three Dimensional Palletization of Mixed Box Sizes. IIE Transactions 25, No. 4, 64-75.

WÄSCHER, G. ; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. (2007). An improved typology of cutting and packing problems. European Journal of Operational Research, 183, No. 3, 1109-1130.